投稿類別：數學類

篇名：

蜘蛛網——正 n 邊形的內接有理多邊形

作者：
吳懿珊。金門高中。高二 10 班。
王嘉琳。金門高中。高二 10 班。
楊佳樺。金門高中。高二 10 班。

指導老師：楊玉星老師

壹、前言

一、研究動機

在閱讀科學研習月刊中第57-3期(2018年3月份)的「森棚教官數學題」專欄時，我們看到了一道有趣的題目：「小志和小定過年回鄉下外婆家，看到正十二角形的窗戶上圍了好大一片蜘蛛網，如圖1有網點部分。小志說：『怎麼沒看到蜘蛛呢？』兩人於是找了蜘蛛一陣子，小定瞪著蜘蛛網一會兒，然後說：『我知道蜘蛛網的面積占窗戶的幾分之幾喔！』聰明的讀者，請問小定的答案是多少？更一般化說，如果n邊形的窗戶面積是1，哪一些形狀的內接k邊形蜘蛛網的面積會是有理數呢？」於是，我們嘗試著用GGB來繪出正十二邊形的所有內接多邊形，並利用GGB算出其面積與正十二邊形面積的比值，從中發現以12為分母的所有真分數皆存在對應的內接多邊形，因此，我們想知道其它的正多邊形是否也有相同的性質，進而展開了我們的研究。

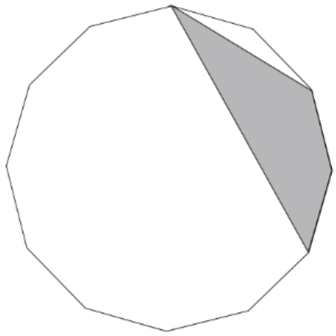


圖 1

二、研究目的

(一)探討哪些正n邊形有內接有理多邊形？

(二)探討有內接有理多邊形的正n邊形之邊數n具有哪些特性？

(三)尋找正n邊形和其內接有理多邊形之間的關係，設法找出其規律並加以證明。

三、研究方法

先利用動態幾何軟體Geogebra和GSP4.0繪出正四邊形至正十二邊形的所有可能的內接有理多邊形，從中尋找規律並加以證明，希望可以進一步推導出正n邊形有內接有理多邊形的可能條件。

四、研究設備

紙、筆、電腦、GGB、GSP4.0。

貳、正文

一、名詞定義

(一)面積比：在一正n邊形 (n≧4)中，若選k個頂點(3≦k≦n-1)所形成的k邊形，我們

稱 $\frac{\text{k邊形面積}}{\text{正n邊形面積}}$ 為此內接k邊形的面積比。

(二)有理多邊形：在一正n邊形(n≧4)中，若選k個頂點(3≦k≦n-1)所形成的k邊形，滿足 $\frac{\text{k邊形面積}}{\text{正n邊形面積}}$ 為有理數，則稱此k邊形為正n邊形的有理多邊形。

(三)有理正多邊形：在一正 n 邊形(n≧4)中，若任選 k 個頂點(3≦k≦n-1)所形成的 k 邊形，皆為有理多邊形，則稱此正 n 邊形為有理正多邊形。

(四)完全正多邊形：在一正 n 邊形(n≧4)中，若從中可選 n-1 種有理多邊形，且對應 n-1 個有理數($\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\ldots,\frac{n-2}{n},\frac{n-1}{n}$)，則稱此正 n 邊形為完全正多邊形。

(五)完美正多邊形：在一有理正 n 邊形(n≧4)中，可選 n-1 種有理多邊形，且對應 n-1 個有理數($\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\ldots,\frac{n-2}{n},\frac{n-1}{n}$)，則稱此有理正 n 邊形為完美正多邊形。

(六)質正多邊形：在一正 n 邊形(n≧4)中，若任選 k 個頂點(3≦k≦n-1)所形成的 k 邊形，都不是有理多邊形，則稱此正 n 邊形為質正多邊形。

(七)若一正 n 邊形的內接 k 邊形的表示法為＜a_1 • ... • a_{k-1} • a_k＞，則a_k對應正 n 邊形中的a_k條邊，且$a_1+\cdots+a_{k-1}+a_k=n$。若將＜＞內的順序重新排列，則形狀可能會改變，但並不影響此內接 k 邊形的面積。假設將正 n 邊形中的內接 k 邊形＜a_1 • ... • a_{k-1} • a_k＞重排為＜b_1 • ... • b_{k-1} • b_k＞，雖然兩者順序不同，且形狀也可能不同，但它們的面積可視為正 n 邊形的面積分別扣除同樣數塊相同圖形的面積，只是所扣除的順序不同，所以兩者的面積仍是相同的。以正七邊形為例，兩種內接四邊形排列分別為＜1 • 1 • 2 • 3＞和＜1 • 2 • 1 • 3＞，兩者的組合數相同，但順序不同，且形狀也不同，不過它們的面積可視為正七邊形的面積分別扣除全等的等腰三角形和等腰梯形的面積，因此兩者的面積是相同的。為了方便說明，＜＞內的順序原則上我們採用由小到大的排列。

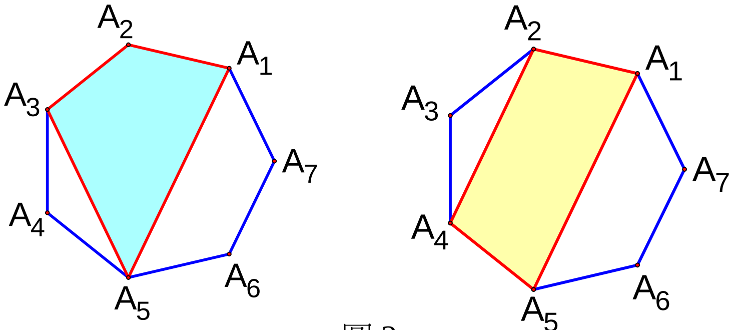


圖 2

二、文獻探討

黃越 有理角的三角函數哪些是無理數？數學傳播 2020年9月「**有理角的三角函數就只有cos 0° (sin 90°), cos 90° (sin 0°), cos 60° (sin 30°), tan 0° (cot 0°), tan 0°(cot 0°), tan 45° (cot 45°)是有理數，其餘的全是無理數。**」

三、研究過程

(一)首先我們將範圍鎖定在正四邊形至正十二邊形，依據是否具有內接有理多邊形將其區分為兩類。

1. 有內接有理多邊形的正多邊形：
正四邊形、正六邊形、正八邊形、正九邊形、正十邊形、正十二邊形。

(1)正四邊形

如圖3所示，正四邊形的內接k邊形只有＜1 • 1 • 2＞一種，且其為面積比為 $\frac{2}{4}$ 的有理多邊形，

因此正四邊形為有理正多邊形。

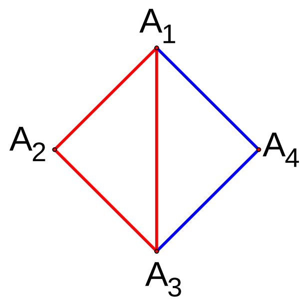


圖 3

(2)正六邊形

正六邊形的面積比為 $\frac{n}{6}$ 的有理多邊形如下表：

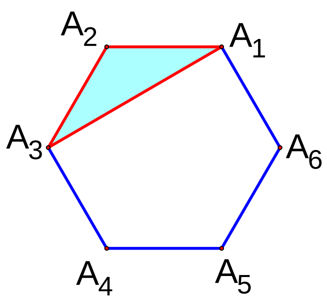
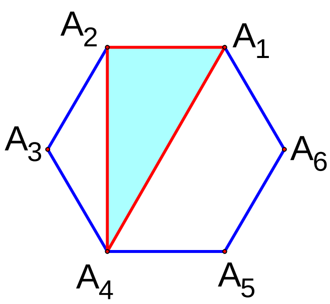
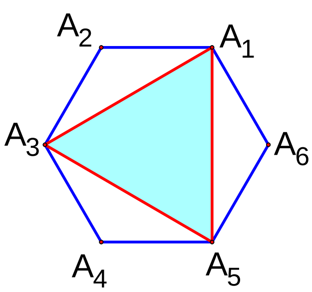
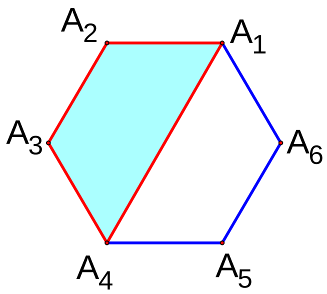
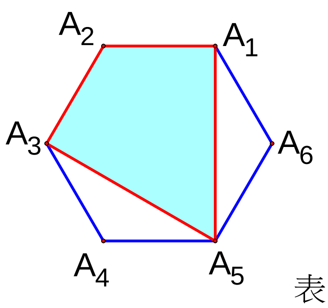
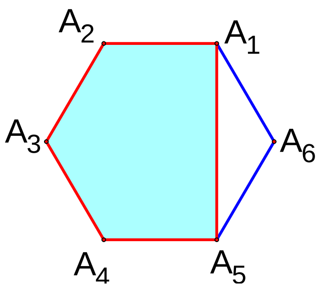
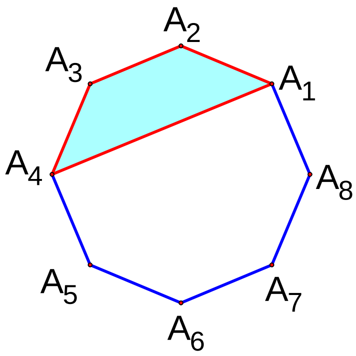
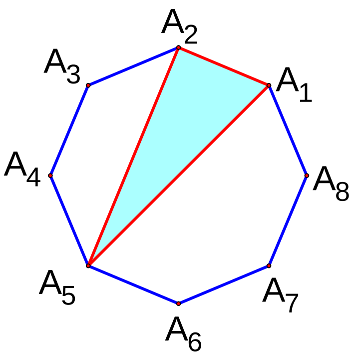
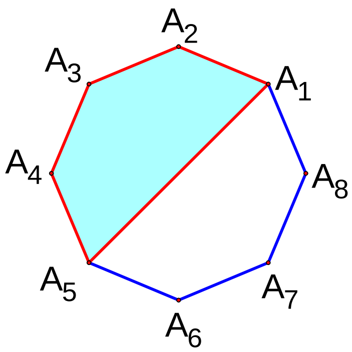
n=1：＜1 • 1 • 4＞	n=2：＜1 • 2 • 3＞	n=3：＜2 • 2 • 2＞
		
n=3：＜1 • 1 • 1 • 3＞	n=4：＜1 • 1 • 2 • 2＞	n=5：＜1 • 1 • 1 • 1 • 2＞
		

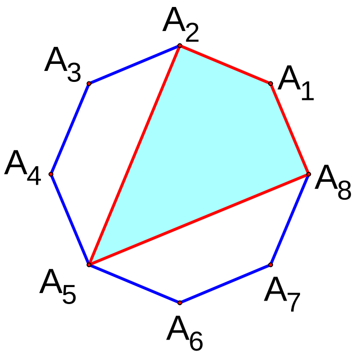
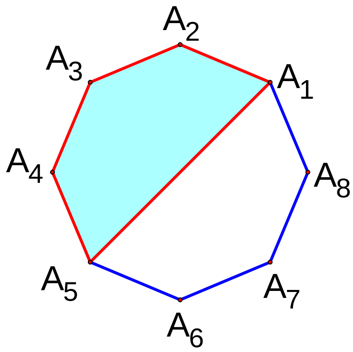
表 1

如上表1所示，正六邊形的所有內接k邊形均為有理多邊形，且其面積比對應所有以6為分母的真分數，因正六邊形為完美正多邊形。

(3)正八邊形

正八邊形的面積比為 $\frac{n}{8}$ 的有理多邊形如下表：

n=2：＜1 • 1 • 1 • 5＞	n=2：＜1 • 3 • 4＞	n=4：＜1 • 1 • 1 • 1 • 4＞
		

n=4：＜1 • 3 • 3 • 1＞	n=6：＜1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 3＞
	 表 2

如上表2所示，正八邊形的內接k邊形只有三種有理多邊形，且其它內接k邊形並不是有理多邊形，因此正八邊形並不是有理正多邊形。

(4)正九邊形

如圖4所示，正九邊形只有面積比為 $\frac{3}{9}$ 的有理多邊形＜1 • 1 • 2 • 5＞，其餘內接k邊形均非有理多邊形，因此正九邊形並不是有理正多邊形。

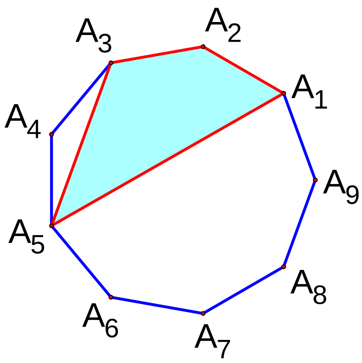
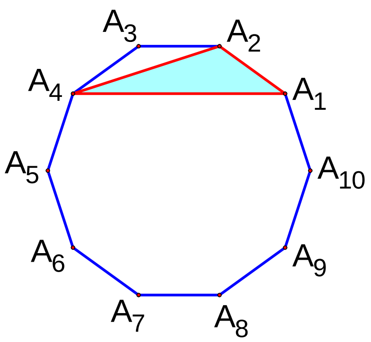
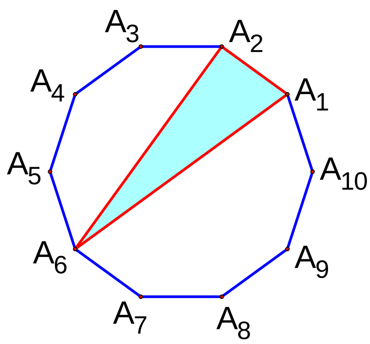
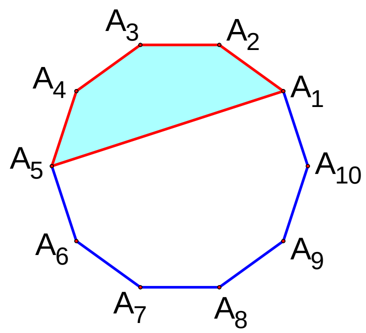
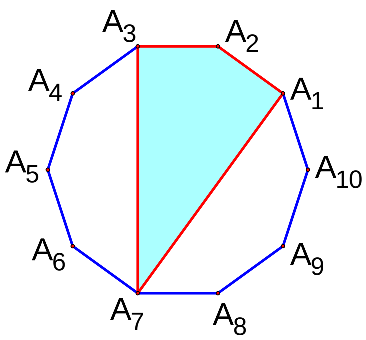
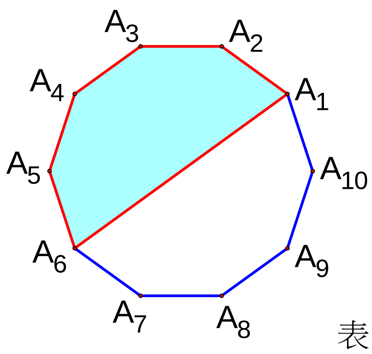
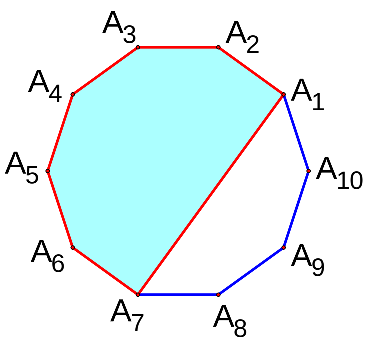


圖 4

(5)正十邊形

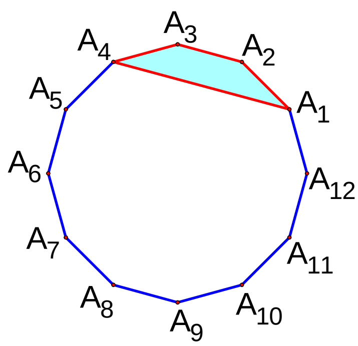
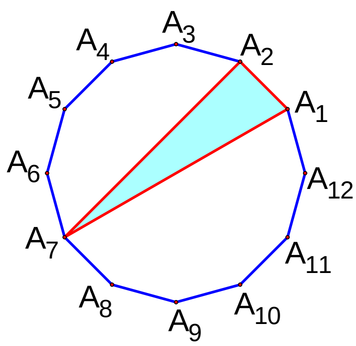
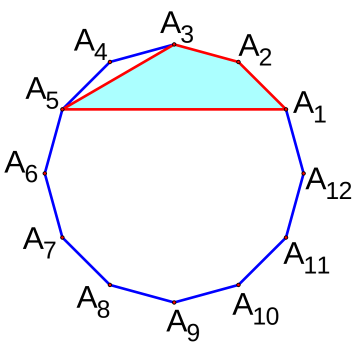
正十邊形的面積比為 $\frac{n}{10}$ 的有理多邊形如下表：

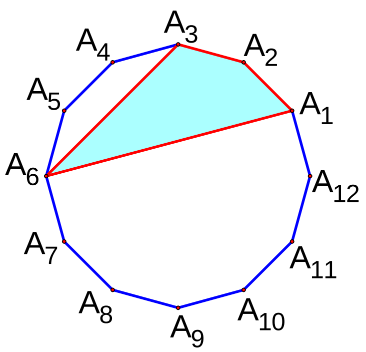
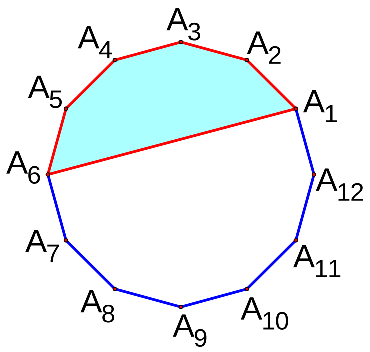
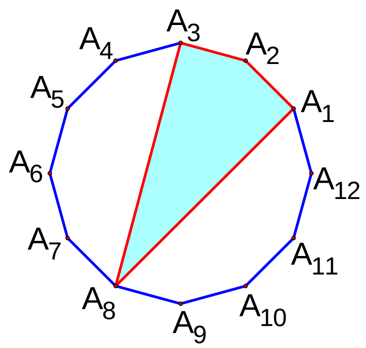
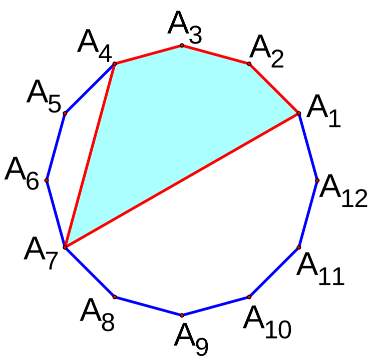
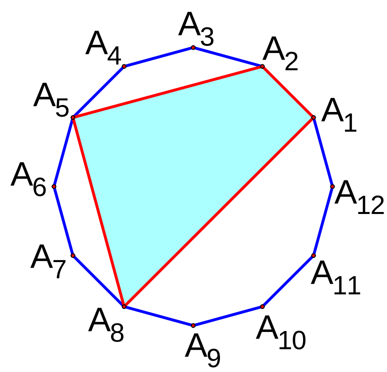
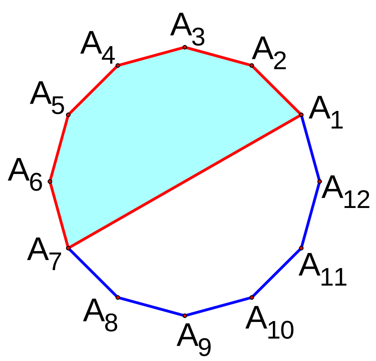
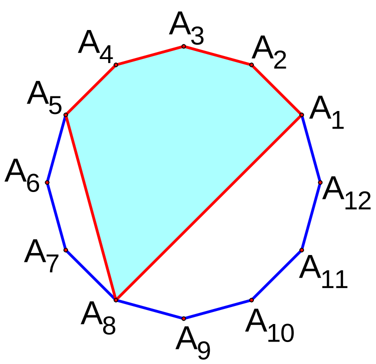
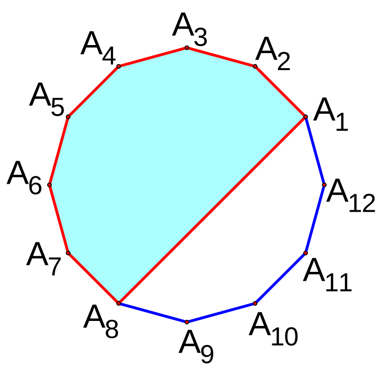
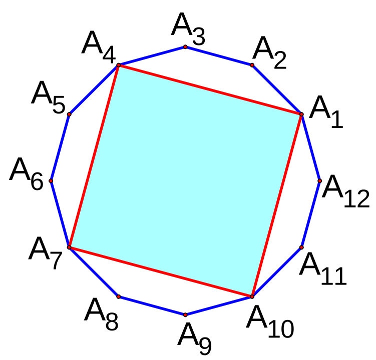
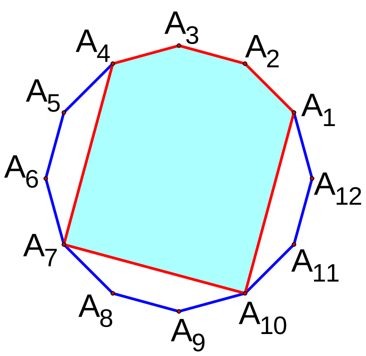
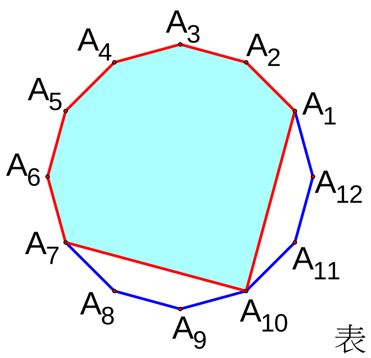
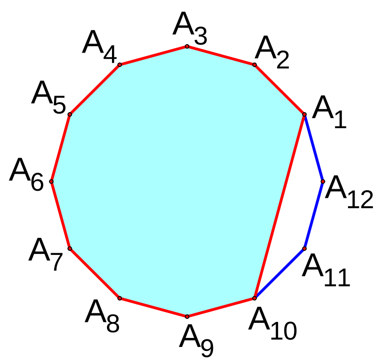
n=1：＜1 • 2 • 7＞	n=2：＜1 • 4 • 5＞	n=3：＜1 • 1 • 1 • 1 • 6＞
		
n=4：＜1 • 1 • 4 • 4＞	n=5： ＜1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 5＞	n=7： ＜1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 4＞
	 表 3	

如上表3所示，正十邊形的內接k邊形只有六種有理多邊形，且其它內接k邊形並不是有理多邊形，因此正十邊形並不是有理正多邊形。

(6)正十二邊形

正十二邊形的面積比為 $\frac{n}{12}$ 的有理多邊形如下表：

n=1：＜1 • 1 • 1 • 9＞	n=2：＜1 • 5 • 6＞	n=2：＜1 • 1 • 2 • 8＞
		

n=3：＜1 • 1 • 3 • 7＞	n=4：＜ • 1 • 1 • 1 • 1 • 7＞	n=4：＜1 • 1 • 5 • 5＞
		
n=5： ＜1 • 1 • 1 • 3 • 6＞	n=6： ＜1 • 3 • 3 • 5＞	n=6： ＜1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 6＞
		
n=7： ＜1 • 1 • 1 • 1 • 3 • 5＞	n=8： ＜1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 5＞	n=8： ＜3 • 3 • 3 • 3＞
		
n=9： ＜1 • 1 • 1 • 3 • 3 • 3＞	n=10： ＜1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 3 • 3＞	n=11： ＜1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 3＞
	表 4	

如上表4所示，正十二邊形只有上述的內接k邊形為有理多邊形，雖然其面積比對應所有以12為分母的真分數，但其餘內接k邊形並非有理多邊形，因此正十二邊形為完全正多邊形，但不是完美正多邊形。

2. 沒有內接有理多邊形的正多邊形：正五邊形、正七邊形、正十一邊形。

(1)正五邊形共有 3 種內接 k 邊形，分別為＜1 • 1 • 3＞、＜1 • 2 • 2＞及＜1 • 1 • 1 • 2＞。

如圖 5 所示，其面積比計算方式如下：
設一單位圓的內接正五邊形，利用三角形面積公式，可得其面積S為

$$S = \text{正五邊形面積} = 5\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{5}{2}\sin\frac{2\pi}{5}\text{。}$$

在正五邊形中，利用正弦定理，可得其邊長

$\overline{A_1A_2}$為 $\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{10}}\cdot\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{3\pi}{10}}$。

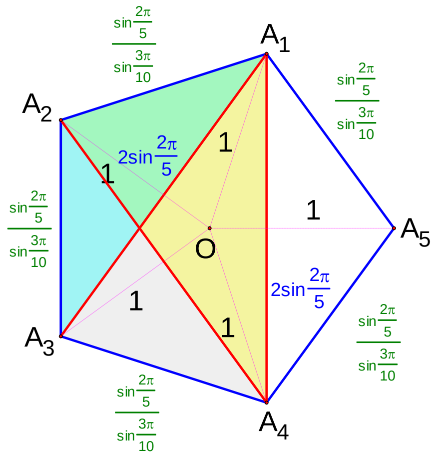


圖 5

在等腰ΔOA_1A_3中，利用正弦定理，可得$\overline{A_1A_3}$的長為

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{3\pi}{10}}\cdot\frac{\sin\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin^2\frac{2\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin^2\frac{2\pi}{5}}{\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{5}} = 2\sin\frac{2\pi}{5}$$

利用三角形面積公式，得正五邊形的內接三邊形＜1・1・3＞面積為

$$S_1 = \Delta A_1A_2A_3\text{面積} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{3\pi}{10}}\cdot 2\sin\frac{2\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sin^2\frac{2\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}\cdot\sin\frac{\pi}{5}$$

所以其面積比

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{\sin^2\frac{2\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}\cdot\sin\frac{\pi}{5}}{\frac{5}{2}\sin\frac{2\pi}{5}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}\cdot\sin\frac{\pi}{5} = \frac{2}{5}\cdot\frac{2\sin^2\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}} = \frac{4}{5}\cdot\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{2}{5}\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)\text{為無理數。}$$

同理，利用三角形面積公式，得正五邊形的內接三邊形＜1・2・2＞面積為

$$S_2 = \Delta A_1A_2A_4\text{面積} = 2\sin^2\frac{2\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{5}\text{，}$$

所以其面積比$\frac{S_2}{S} = \frac{2\sin^2\frac{2\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{5}}{\frac{5}{2}\sin\frac{2\pi}{5}} = \frac{4}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5} = \frac{2}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{2}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)$

為無理數。

因為正五邊形的內接四邊形<1．1．1．2>面積可視為正五邊形的面積減去內接三邊形<1．1．3>的面積，所以其面積比

$\frac{S_3}{S}=\frac{S}{S}-\frac{S_1}{S}=1-\frac{2}{5}\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}cos\frac{2\pi}{5}$ 為無理數。

由上可知，正五邊形的所有內接k邊形的面積比皆是無理數，因此，正五邊形為質正多邊形。

(2)正七邊形共有 10 種內接 k 邊形，如圖 6 所示。

同理可證：$\Delta A_1A_2A_3$面積比為$\frac{2}{7}\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)$、$\Delta A_1A_3A_4$面積比為 $\frac{2}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)$、$\Delta A_1A_4A_5$面積比為$\frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}\right)$，另外 7 種內接 k 邊形之面積比可經由上述 3 種內接三邊形拼接而成，且面積比均為無理數，因此，正七邊形為質正多邊形。

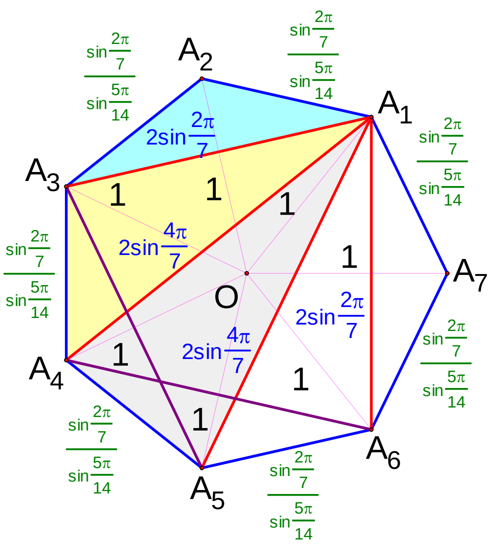


圖 6

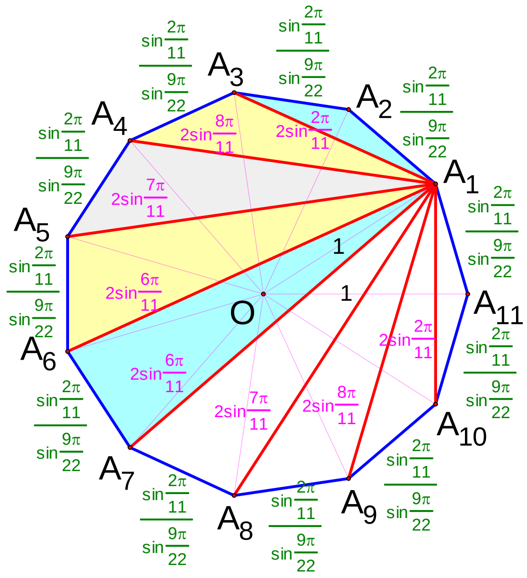


圖 7

(3)正十一邊形共有 49 種內接 k 邊形，如圖 7 所示。

同理可證：$\Delta A_1A_2A_3$面積比為$\frac{2}{11}\left(1-\cos\frac{2\pi}{11}\right)$、$\Delta A_1A_3A_4$面積比為 $\frac{2}{11}\left(\cos\frac{2\pi}{11}-\cos\frac{4\pi}{11}\right)$、$\Delta A_1A_4A_5$面積比為$\frac{1}{11}\left(1+\frac{\cos\frac{4\pi}{11}}{\cos\frac{\pi}{11}}\right)$、$\Delta A_1A_5A_6$面積比為 $\frac{1}{11}\left(1+\frac{\cos\frac{2\pi}{11}}{\cos\frac{\pi}{11}}\right)$、$\Delta A_1A_6A_7$面積比為$\frac{1}{11}\left(1+\frac{1}{\cos\frac{\pi}{11}}\right)$，另外 44 種內接 k 邊形之面積比可經由上述 5 種內接三邊形拼接而成，且面積比均為無理數，因此，正十一邊形為質正多邊形。

(二) 此外，我們還發現部分有理正多邊形與其內接有理多邊形之間具有規律可尋。

1. 正 6(n+k)邊形內的內接 k+3 邊形＜1_1 • 1_2 • …… • 1_k • k • n • 5n+4k＞和正 6(n+k)邊形的面積比符合$\frac{\mathrm{k}}{6(\mathrm{n+k})}$，證明如下：

設一單位圓的內接正 6(n+k)邊形，利用三角形面積公式，可得其面積S為

$$\mathrm{S}=6(\mathrm{n}+\mathrm{k})\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2\pi}{6(\mathrm{n+k})}\right]=\frac{6(\mathrm{n+k})}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{6(\mathrm{n+k})}。$$

又內接 k+3 邊形＜$1_1\cdot 1_2\cdot$ …… • 1_k • n • 5n+4k＞之面積為

$$\begin{aligned}&\mathrm{S}_{\mathrm{A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}A_{2k+n}}}\\&=\mathrm{k}\left[\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2\pi}{6(\mathrm{n+k})}\right]+\left[\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2\pi\cdot\mathrm{k}}{6(\mathrm{n+k})}\right]+\left[\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2\pi\cdot\mathrm{n}}{6(\mathrm{n+k})}\right]-\left[\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{(\mathrm{n+2k})\cdot 2\pi}{6(\mathrm{n+k})}\right]\\&=\frac{\mathrm{k}}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{6(\mathrm{n+k})}+\frac{1}{2}\left[\sin\frac{2\mathrm{k}\cdot\pi}{6(\mathrm{n+k})}+2\cos\frac{2(\mathrm{n+k})\pi}{6(\mathrm{n+k})}\sin\frac{(-2\mathrm{k})\pi}{6(\mathrm{n+k})}\right]\\&=\frac{\mathrm{k}}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{6(\mathrm{n+k})}+\frac{1}{2}\left[\sin\frac{2\mathrm{k}\cdot\pi}{6(\mathrm{n+k})}+2\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{(-2\mathrm{k})\cdot\pi}{6(\mathrm{n+k})}\right]\\&=\frac{\mathrm{k}}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{6(\mathrm{n+k})}+\frac{1}{2}\left[\sin\frac{2\mathrm{k}\cdot\pi}{6(\mathrm{n+k})}-\sin\frac{2\mathrm{k}\cdot\pi}{6(\mathrm{n+k})}\right]\\&=\frac{\mathrm{k}}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{6(\mathrm{n+k})}\end{aligned}$$

所以其面積比為$\frac{\mathrm{S}_{\mathrm{A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}A_{2k+n}}}}{\mathrm{S}}=\frac{\mathrm{k}}{2}\cdot\frac{2}{6(\mathrm{n+k})}=\frac{\mathrm{k}}{6(\mathrm{n+k})}$。

2. 正 2(2n+k)邊形內的內接 k+2 邊形<1_1 • 1_2 • …… • 1_k • n • 3n + k>和正 2(2n+k)邊形的面積比符合$\frac{k}{2(2n+k)}$，證明如下：

設一單位圓的內接正 2(2n+k)邊形，利用三角形面積公式，可得其面積S為

$$\mathrm{S}=2(2\mathrm{n}+\mathrm{k})\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2\pi}{2(2\mathrm{n+k})}\right]=\frac{2(2\mathrm{n+k})}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{2(2\mathrm{n+k})}。$$

又內接 k+2 邊形<$1_1\cdot 1_2\cdot$ ……$\cdot\, 1_k\cdot \mathrm{n}\cdot 3\mathrm{n}+\mathrm{k}$>之面積為

$$\begin{aligned}&\mathrm{S}_{\mathrm{A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}A_{k+n+1}}}\\&=\mathrm{k}\left[\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2\pi}{2(2\mathrm{n+k})}\right]+\left[\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2\pi\cdot\mathrm{n}}{2(2\mathrm{n+k})}\right]-\left[\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{(\mathrm{n+k})\cdot 2\pi}{2(2\mathrm{n+k})}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{k}{2} \cdot \sin\frac{2\pi}{2(2n+k)} + \frac{1}{2}\left[sin\frac{2n\cdot\pi}{2(2n+k)} - sin\frac{2(k+n)\cdot\pi}{2(2n+k)}\right]$$

$$= \frac{k}{2} \cdot sin\frac{2\pi}{2(2n+k)} + \frac{1}{2}\left\{2\,cos\frac{(2n+k)\pi}{2(2n+k)}\left[-sin\frac{k\pi}{2(2n+k)}\right]\right\}$$

$$= \frac{k}{2} \cdot sin\frac{2\pi}{2(2n+k)} + cos\frac{\pi}{2}\left[-sin\frac{k\pi}{2(2n+k)}\right]$$

$$= \frac{k}{2} \cdot \sin\frac{2\pi}{2(2n+k)}$$

所以其面積比為 $\frac{S_{A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}A_{k+1+n}}}{S} = \frac{k}{2} \cdot \frac{2}{2(2n+k)} = \frac{k}{2(2n+k)}$。

參、結論

一、正方形為有理正多邊形，正六邊形為完美正多邊形，正十二邊形為完全正多邊形。

二、若正n邊形的邊數為質數，則該正n邊形必為質正多邊形。

三、正6(n+k)邊形($n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$)內的內接k+3邊形＜$1_1 \bullet 1_2 \bullet \ldots\ldots \bullet 1_k \bullet k \bullet n \bullet 5n+4k$＞和正6(n+k)邊形的面積比符合$\frac{k}{6(n+k)}$。

四、正2(2n+k)邊形($n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$)內的內接k+2邊形<$1_1 \bullet 1_2 \bullet \ldots\ldots \bullet 1_k \bullet n \bullet 3n+k$>和正2(2n+ k)邊形的面積比符合$\frac{k}{2(2n+k)}$。

肆、引注資料

一、森棚教官的數學題。國立台灣科學教育館—科學研習月刊。第57卷第3期。取自 https://www.ntsec.gov.tw/FileAtt.ashx?id=3548

二、黃越 (2020)。有理角的三角函數哪些是無理數？數學傳播，第44卷第3期，87-93。2020年9月，取自https://web.math.sinica.edu.tw/mathmedia/HTMLarticle18.jsp?mID=44310

三、笹部貞市郎原著。幾何學辭典。九章出版社，140-142。