投稿類別：數學類

篇名：千刀萬剮 百慮一致

作者：

林大衛。國立金門高級中學。高二 10 班

黃楷甯。國立金門高級中學。高二 10 班

莊于箴。國立金門高級中學。高二 9 班

指導老師：

楊玉星 老師

壹、前言

一、研究動機

披薩是我們在聚會中很常吃到的美食，可以享受和大家一起分享的美食的喜悅，但在吃披薩的同時，披薩為什麼要這樣切？每切一刀最多能獲得幾塊？想起之前看到披薩切幾刀會有最多塊數的研究，這不禁讓我們好奇，如果不單單只是用直線去切披薩，如果是用二元多次方程式去切，最多能切幾塊?是否也能找出它隱藏在其中的玄機？

二、研究目的

(一)探討不同二次曲線最多能將圓最多能成幾塊

1. 拋物線($\mathrm{y}=ax^2$)
2. 雙曲線($\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=c$)

(二)探討二元偶次方程式最多能將圓分成幾塊？

(三)尋找偶次方程式切割出最多塊數的規律，並推導出其統一公式

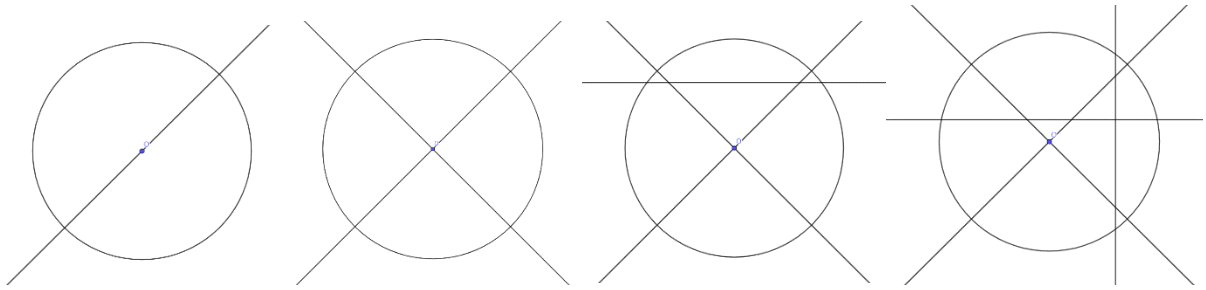
(四)探討二元奇次方程式最多能將圓最多能成幾塊，並推導出其統一公式

三、研究器材

GeoGebra 經典 6 版、紙、筆

貳、正文

一、二元一次方程式切披薩



n=1	n=2	n=3	n=4
2 塊	4 塊	7 塊	11 塊

由此觀察出規律為 1+(1+2+3+⋯+n)，故塊數為$1+\frac{n(n+1)}{2}$

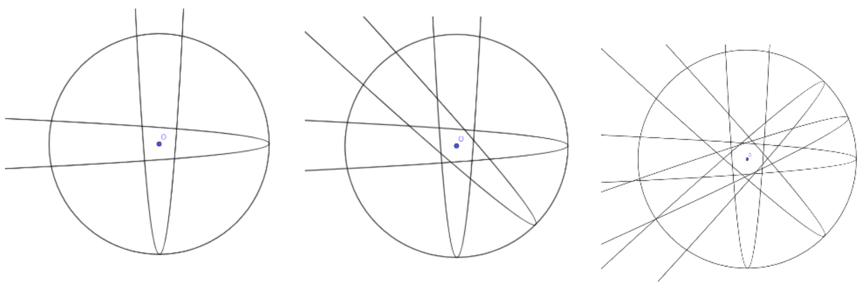
二、二元二次方程式切披薩

若要使塊數為最大值，必須符合以下幾點:

- 三線不共點(包含圓周)
- 頂點在圓周上或外
- 隨意兩函數相交四點
- 二次係數 a 必須夠大

(一)拋物線

定義： $y=ax^2$ (可旋轉、平移)

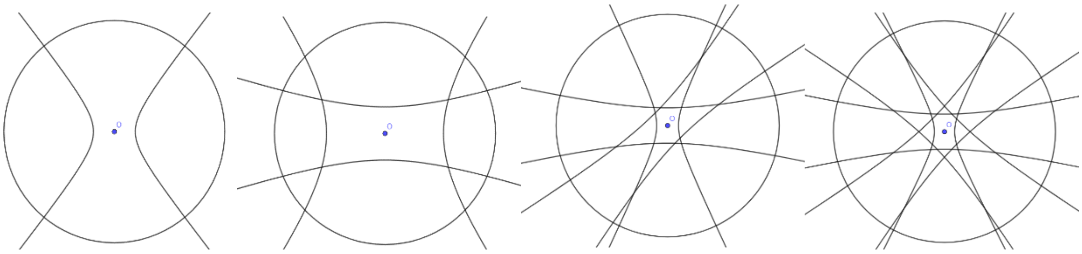


n=1	n=2	n=3	n=4
3 塊	9 塊	19 塊	33 塊

(二)雙曲線

定義: $\Gamma：\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=c$(可旋轉、平移)

為避免雙曲線退化成$x^2 = y^2$的兩條斜直線，或成橢圓，設 a>0 , b<0 , c>0



n=1　　n=2　　n=3　　n=4

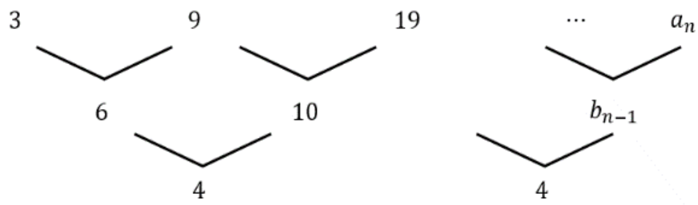
3 塊　　9 塊　　19 塊　　33 塊

公式推導:

$$a_n = \frac{3 + [6 + 10 + \ldots + 6 + 4(n-2)]}{2}$$

$$= 3 + \frac{(n-1)[6 + 6 + 4(n-2)]}{2}$$

$$= 2n^2 + 1$$



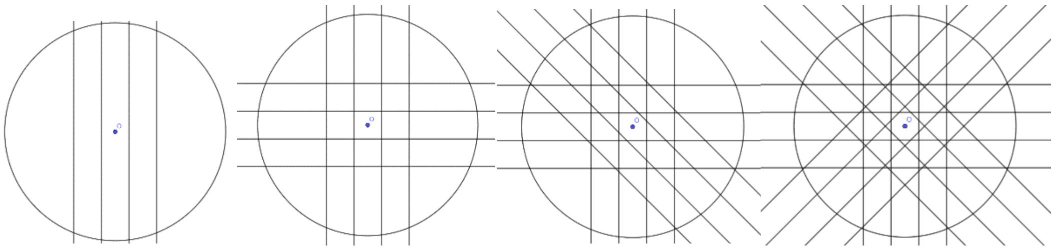
由結果發現未退化雙曲線之塊數和拋物線相同，並且若拋物線之二次係數 a 值，或雙曲線之 b 值夠大時，兩曲線會趨近於兩條平行線，且結果與二次函數最多塊數相同。

三、二元偶數次方程式切披薩

由二元二次方程式找最大值得知，可將函數圖形視為多條平行線，且將方程式設為偶函數可以方便作圖，所以以下我們將以平行線呈現偶函數最多能切幾塊披薩，並且對於切最多規則不再多做贅述。

(一)二元四次方程式

定義：$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ (a,c>0，b,d=0)



n=1　　n=2　　n=3　　n=4

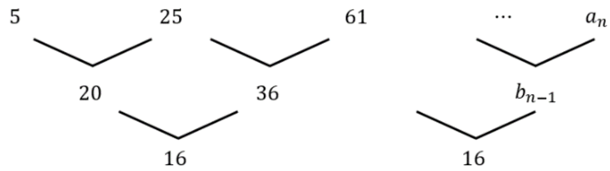
5 塊　　25 塊　　61 塊　　113 塊

公式推導:

$$a_n = \frac{5[20+36+\ldots+20+16(n-2)]}{2}$$

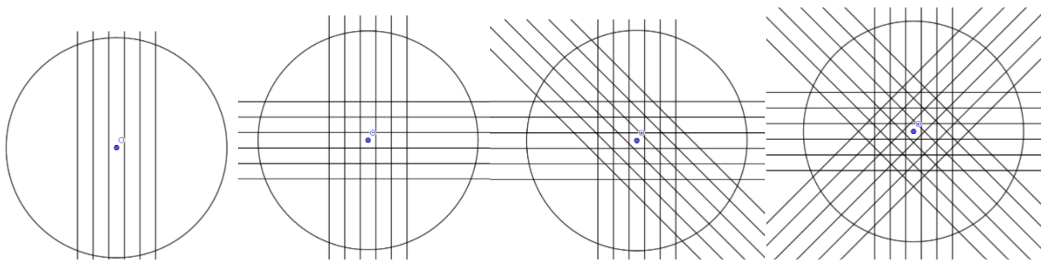
$$= 5 + \frac{(n-1)[20+20+16(n-2)]}{2}$$

$$= 8n^2 - 4n + 1$$



(二)二元六次方程式

定義：$y = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx$ (a,c,e>0，b,d,f=0)



n=1　　n=2　　n=3　　n=4

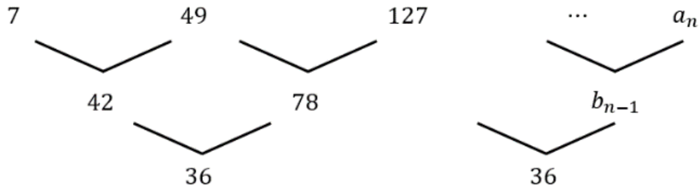
7 塊　　49 塊　　127 塊　　241 塊

公式推導:

$$a_n = \frac{7 + [42 + 78 + \ldots + 42 + (\mathrm{n}-2)36]}{2}$$

$$= 7 + \frac{(\mathrm{n}-1)[84 + (\mathrm{n}-2)36]}{2}$$

$$= 18\mathrm{n}^2 - 12\mathrm{n} + 1$$



四、整合公式

公式推導:

設 $\frac{\mathrm{m}}{2}$ 次方程式，切 n 條

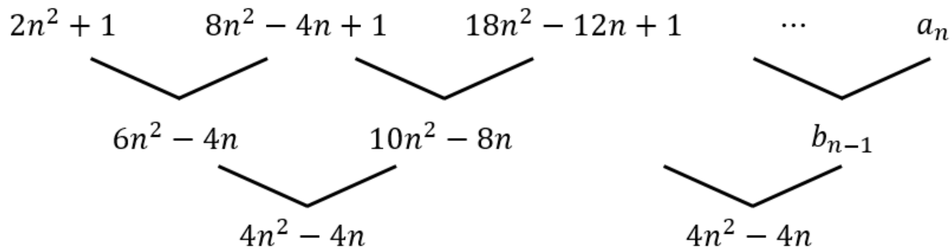
得: $a_m = 2\mathrm{n}^2 + 1\,\frac{(\mathrm{m}-1)[2(6\mathrm{n}^2 - 4\mathrm{n}) + (\mathrm{m}-2)(4\mathrm{n}^2 - 4\mathrm{n})]}{2}$

$$= 2\mathrm{n}^2 + 1 + (\mathrm{m}-1)(6\mathrm{n}^2 - 4\mathrm{n} + 2\mathrm{mn}^2 - 2\mathrm{mn} - 4\mathrm{n} + 4\mathrm{n}^2)$$

$$= 2\mathrm{m}^2\mathrm{n}^2 - 2\mathrm{m}^2\mathrm{n} + 2\mathrm{mn} + 1$$

將 $\frac{\mathrm{m}}{2}$ 代入:

$$\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{n}^2}{2} - \frac{\mathrm{m}^2\mathrm{n}}{2} + \mathrm{mn} + 1 \quad = \frac{\mathrm{m}^2}{2}\mathrm{n}^2 - \frac{\mathrm{m}(\mathrm{m}+2)}{2}\mathrm{n} + 1$$



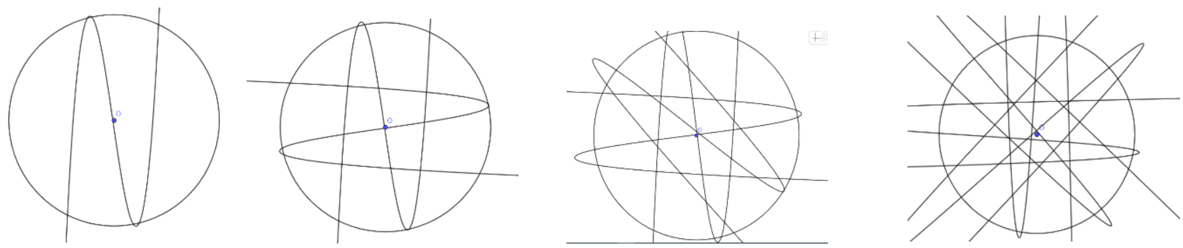
五、二元奇數次方程式切披薩

(一)二元三次方程式

定義:$y = ax^3 + bx^2 + cx$ (b=0，a，c≠0 可旋轉、平移)

若要使塊數為最大值，必須符合以下幾點:

- 隨意兩函數相交九點
- $\Delta = 4b^2 - 12ac > 0$



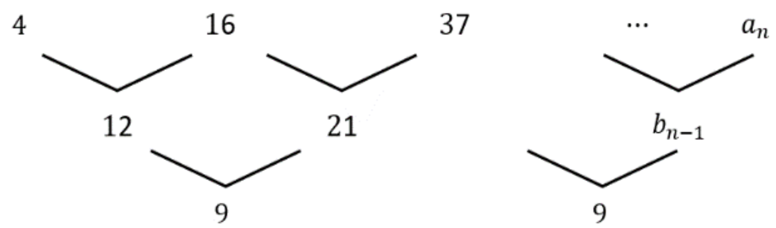
n=1	n=2	n=3	n=4
4 塊	16 塊	37 塊	61 塊

公式推導:

$$a_n = \frac{4 + (n-1)[212 + 9(n-2)]}{2}$$

$$= \frac{8 + (n-1)(9n+6)}{2}$$

$$= \frac{9n^2 - 3n}{2} + 1$$

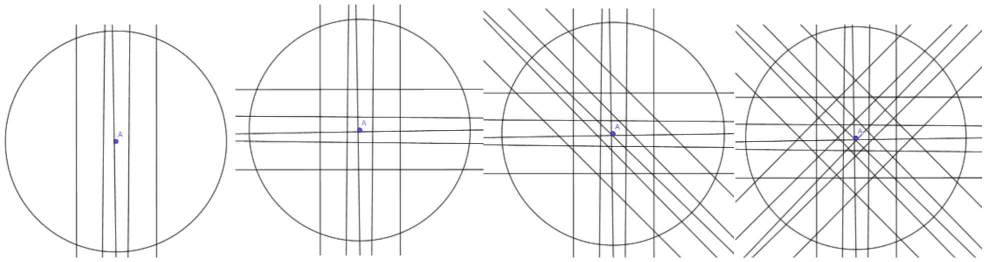


(二)二元五次方程式

定義：$y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex$ (b,d=0，a,c,e≠ 0，且可旋轉、平移)

若要使塊數為最大值，必須符合以下幾點:

- 隨意兩函數相交二十五點
- a<0，c>0，e<0



n=1 n=2 n=3 n=4

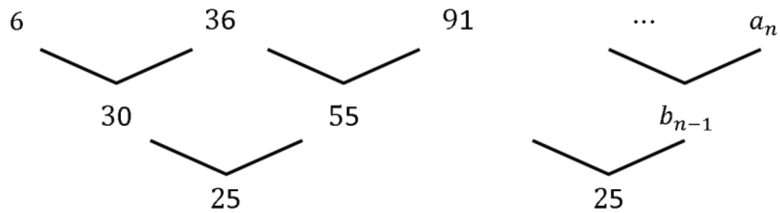
6 塊 36 塊 91 塊 171 塊

公式推導:

$$a_n = \frac{6+30+55+\ldots+30+25(\mathrm{n}-2)}{2}$$

$$= 6 + \frac{(\mathrm{n}-1)[30+30+25(\mathrm{n}-2)}{2}$$

$$= \frac{25}{2}\mathrm{n}^2 - \frac{15}{2}\mathrm{n} + 1$$



參、結論

一、設現有一把 m 次函數的刀子，將披薩切 n 刀，則最多塊數為 $\frac{\mathrm{m}^2}{2}\mathrm{n}^2 - \frac{\mathrm{m}(\mathrm{m}-2)}{2}\mathrm{n} + 1$塊

肆、引註資料

1. 維基百科-披薩定理。https://zh.wikipedia.org/zh-tw/披薩定理。(檢索日期 2021/1/13)
2. 游森棚。「游理數．數裡遊 披薩與西瓜」。科學月刊。第 477 期(2009 年 9 月)。頁 24
3. 陳柏澄, 黃天睿, 陳威廷, 楊甯鈞, 陳韓愷, 陳品蓉。金門縣 59 屆科展 國小組數學第一名。「切」你千遍也不厭倦---空間切割的最大區域數「切」你千遍也不厭倦---空間切割的最大區域數。
4. 張翊竫、徐千惠、甘紋華、甘紋慈。96 學年度校內科展數學組第一名。一刀幾斷？