投稿類別：數學類

篇名：
圓內接正多邊形的線段定和

作者：
劉品蘭。金門高中。高二十班
陳嘉翎。金門高中。高二十班

指導老師：
楊玉星老師

壹、前言

一、摘要

在正三邊形的外接圓上任取一點，此點到較遠頂點的距離會等於到較近的兩頂點距離和，藉由托勒密定理，我們發現其它正 N 邊形$A_1A_2\cdots A_N$中，也有相對應的關係式。為了方便討論，不妨設 P 點在正 N 邊形之外接圓的一弧$\widehat{A_1A_2}$上，則在奇數 2n+1(n≥ 1)邊形中，會滿足$\overline{PA_1}+\overline{PA_2}+\overline{PA_4}+\cdots+\overline{PA_{2n}}=\overline{PA_3}+\overline{PA_5}+\cdots+\overline{PA_{2n+1}}$；在偶數 2n(n≥ 2)邊形中，會滿足$\overline{PA_2}^2+\overline{PA_4}^2+\cdots+\overline{PA_{2n}}^2=\overline{PA_1}^2+\overline{PA_3}^2+\cdots+\overline{PA_{2n+1}}^2$，接著，若將此 P 點改成坐標平面上任一點，甚至是空間中的任一點，我們發現亦符合此性質。

二、研究動機

在老師的推薦下閱讀了科學研習月刊，從森棚教官的數學題中發現：「畫正三角形與外接圓，然後在圓上任取一點，則此點到較遠頂點的距離會等於到較近的兩頂點距離和。」，我們好奇若換成其它正多邊形會不會有相同的性質？正好上學期數學專題課學到托勒密定理，我們試著用此定理證看看，竟然成功地證明出各種正 N 邊形中過外接圓定點和各頂點的兩組連線的長度和之關係式，於是在好奇心的驅使下，我們進一步將此連線長度和之關係式分成奇數多邊形與偶數多邊形兩種情形各自推廣。

三、研究目的

(一)若將「在正三角形的外接圓上任取一點，則此點到較遠頂點的距離會等於到較近的兩頂點距離和」推廣到其它正 N 邊形，是否有相同的性質，若否，則探討是否有其它類似的關係式，並設法證明。

(二)對於自然數 n，在正 2n+1 邊形的外接圓上任取一點，則此點到奇頂點的距離和與到偶頂點距離和是否有一定的關係？若有，則設法證明。

(三)對於自然數 n，在正 2n 邊形將的外接圓上任取一點，則此點到奇頂點的距離的平方和與到偶頂點距離的平方和是否有一定的關係？若有，並設法證明。

四、研究設備與器材

電腦、動態幾何軟體 Geogebra、幾何畫板 GSP、紙、筆

貳、正文

一、研究過程與方法

(一) 研究方法

1. 托勒密 Ptolemy 定理

設$ABCD$為圓內接四邊形，四邊分別為a,b,c,d，對角線為x,y，則 $xy=ac+bd$。

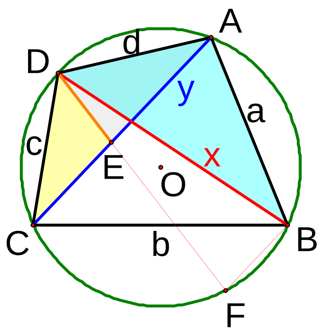
[證明]

如圖一，過D點作一直線$\overleftrightarrow{DF}$交$\overline{AC}$於E點，使得$\angle \mathrm{CDE}=\angle \mathrm{BDA}$。

於是，容易看出$\Delta \mathrm{CDE} \sim \Delta \mathrm{BDA}$，並且$\Delta \mathrm{ADE} \sim \Delta \mathrm{BDC}$。

從而$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AB}}$，$\frac{\overline{BC}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$，於是$\overline{CD}\times\overline{AB}=\overline{BD}\times\overline{CE}\cdots(1)$

$$\overline{AD}\times\overline{BC}=\overline{AE}\times\overline{BD}\cdots(2)$$



圖一

將(1)、(2)兩式相加得

$\overline{CD}\times\overline{AB}+\overline{AD}\times\overline{BC}=\overline{BD}\times(\overline{AE}+\overline{CE})=\overline{BD}\times\overline{AC}$。

亦即$ac+bd=xy$。因此，我們得到托勒密定理。

2. 複數的運算性質

1. $|\mathrm{Z}_1-\mathrm{Z}_2|=$點$\mathrm{Z}_1$與點$\mathrm{Z}_2$的距離。

2. $|\mathrm{Z}|^2=\mathrm{Z}\overline{\mathrm{Z}}$。

3. $1+\omega+\omega^2+\cdots\cdots+\omega^{n-1}=0(\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})$

(二) 研究過程

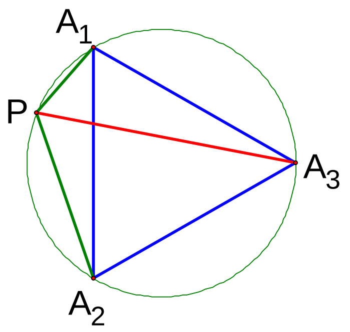
為了方便討論，考慮 P 點在正 N 邊形之外接圓的一弧$\widehat{A_1A_2}$上，並且設此正 N 邊形的邊長為 1。

1. 正多邊形的外接圓上定點到遠頂點的距離和與最近兩頂點的距離和之比值為定值

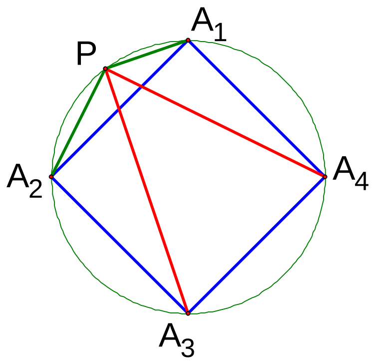
[證明]

(1)正三邊形

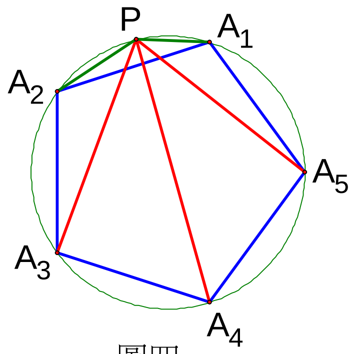
如圖二，在四邊形$PA_1A_3A_2$中，因為$1\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$，所以 $\frac{\overline{PA_3}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=1$。



圖二



圖三



圖四

(2)正四邊形

如圖三，因為在四邊形$PA_1A_3A_2$中，$1\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$；

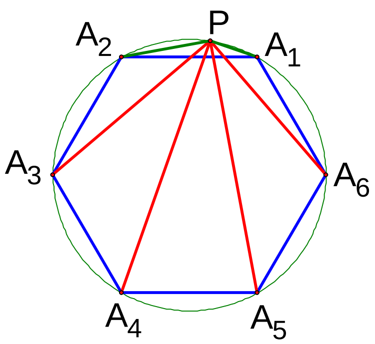
在四邊形$PA_1A_4A_2$中， $\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_4}$，所以 $\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}+1$。

(3)正五邊形

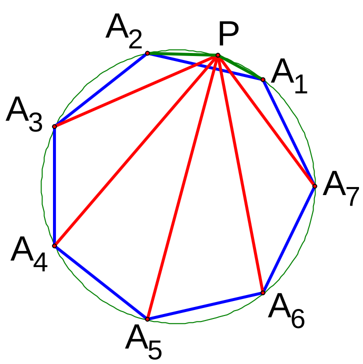
如圖四，因為在四邊形$PA_1A_3A_2$中，$1\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$；

在四邊形$PA_1A_4A_2$中， $\frac{\sin\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_4}$；

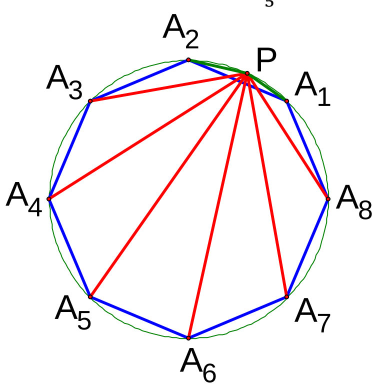
在四邊形$PA_1A_5A_2$中，$\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_5}$，所以$\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=\frac{2\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}+1$。



圖五



圖六



圖七

(4)正六邊形

如圖五，因為在四邊形$PA_1A_3A_2$中，$1\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{4\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$；

在四邊形$PA_1A_4A_2$中，$\frac{\sin\frac{4\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} \times \overline{PA_1} + \frac{\sin\frac{3\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} \times \overline{PA_2} = 1 \times \overline{PA_4}$；

在四邊形$PA_1A_5A_2$中，$\frac{\sin\frac{3\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} \times \overline{PA_1} + \frac{\sin\frac{2\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} \times \overline{PA_2} = 1 \times \overline{PA_5}$；

在四邊形$PA_1A_6A_2$中，$\frac{\sin\frac{2\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} \times \overline{PA_1} + 1 \times \overline{PA_2} = 1 \times \overline{PA_6}$，

所以 $\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\overline{PA_6}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}} = \frac{2\sin\frac{2\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} + 1$。

(5)正七邊形

如圖六，因為在四邊形$PA_1A_3A_2$中，$1 \times \overline{PA_1} + \frac{\sin\frac{5\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} \times \overline{PA_2} = 1 \times \overline{PA_3}$；

在四邊形$PA_1A_4A_2$中，$\frac{\sin\frac{5\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} \times \overline{PA_1} + \frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} \times \overline{PA_2} = 1 \times \overline{PA_4}$；

在四邊形$PA_1A_5A_2$中，$\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} \times \overline{PA_1} + \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} \times \overline{PA_2} = 1 \times \overline{PA_5}$；

在四邊形$PA_1A_6A_2$中，$\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} \times \overline{PA_1} + \frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} \times \overline{PA_2} = 1 \times \overline{PA_6}$；

在四邊形$PA_1A_7A_2$中，$\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} \times \overline{PA_1} + 1 \times \overline{PA_2} = 1 \times \overline{PA_7}$，

所以$\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\overline{PA_6}+\overline{PA_7}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}} = \frac{2(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7})}{\sin\frac{\pi}{7}} + 1$。

(6)正八邊形

如圖七，因為在四邊形$PA_1A_3A_2$中，$1 \times \overline{PA_1} + \frac{\sin\frac{6\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} \times \overline{PA_2} = 1 \times \overline{PA_3}$；

在四邊形$PA_1A_4A_2$中，$\frac{\sin\frac{6\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} \times \overline{PA_1} + \frac{\sin\frac{5\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} \times \overline{PA_2} = 1 \times \overline{PA_4}$；

在四邊形$PA_1A_5A_2$中，$\frac{\sin\frac{5\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} \times \overline{PA_1} + \frac{\sin\frac{4\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} \times \overline{PA_2} = 1 \times \overline{PA_5}$；

在四邊形$PA_1A_6A_2$中，$\frac{\sin\frac{4\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} \times \overline{PA_1} + \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} \times \overline{PA_2} = 1 \times \overline{PA_6}$；

在四邊形$PA_1A_7A_2$中，$\frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} \times \overline{PA_1} + \frac{\sin\frac{2\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} \times \overline{PA_2} = 1 \times \overline{PA_7}$；

在四邊形$PA_1A_8A_2$中，$\frac{\sin\frac{2\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} \times \overline{PA_1} + 1 \times \overline{PA_2} = 1 \times \overline{PA_8}$，

所以 $\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\overline{PA_6}+\overline{PA_7}+\overline{PA_8}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}} = \frac{2(\sin\frac{2\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8})+\sin\frac{4\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} + 1$。

(7)正九邊形

如圖八，因為在四邊形$PA_1A_3A_2$中，$1\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{7\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$；

在四邊形$PA_1A_4A_2$中，$\frac{\sin\frac{7\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{6\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_4}$；

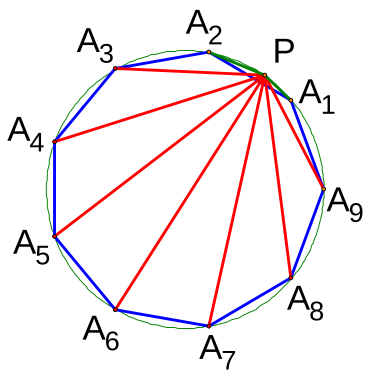
在四邊形$PA_1A_5A_2$中，$\frac{\sin\frac{6\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{5\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_5}$；

在四邊形$PA_1A_6A_2$中，$\frac{\sin\frac{5\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_6}$；

在四邊形$PA_1A_7A_2$中，$\frac{\sin\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{3\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_7}$；

在四邊形$PA_1A_8A_2$中，$\frac{\sin\frac{3\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_8}$；

在四邊形$PA_1A_9A_2$中，$\frac{\sin\frac{2\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_9}$，



圖八

所以 $\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\overline{PA_6}+\overline{PA_7}+\overline{PA_8}+\overline{PA_9}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=\frac{2(\sin\frac{2\pi}{9}+\sin\frac{3\pi}{9}+\sin\frac{4\pi}{9})}{\sin\frac{\pi}{9}}+1$。

(8)正十邊形

如圖九，因為在四邊形$PA_1A_3A_2$中， $1\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{8\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$；

在四邊形$PA_1A_4A_2$中，$\frac{\sin\frac{8\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{7\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_4}$；

在四邊形$PA_1A_5A_2$中，$\frac{\sin\frac{7\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{6\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_5}$；

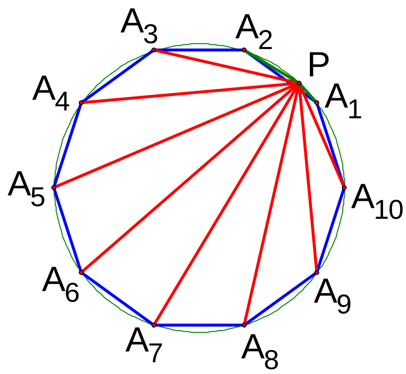
在四邊形$PA_1A_6A_2$中，$\frac{\sin\frac{6\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{5\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_6}$；

在四邊形$PA_1A_7A_2$中，$\frac{\sin\frac{5\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{4\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_7}$；

在四邊形$PA_1A_8A_2$中，$\frac{\sin\frac{4\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{3\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_8}$；

在四邊形$PA_1A_9A_2$中，$\frac{\sin\frac{3\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_9}$；

在四邊形$PA_1A_{10}A_2$中，$\frac{\sin\frac{2\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_{10}}$，



圖九

所以 $\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\overline{PA_6}+\overline{PA_7}+\overline{PA_8}+\overline{PA_9}+\overline{PA_{10}}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=\frac{2\left(\sin\frac{2\pi}{10}+\sin\frac{3\pi}{10}+\sin\frac{4\pi}{10}\right)+\sin\frac{5\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}+1$。

(9)一般式

(i)正 2n+1 邊形：

在四邊形$\mathrm{PA_1A_3A_2}$中，$1\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}=1\times\overline{\mathrm{PA_3}}$

在四邊形$\mathrm{PA_1A_4A_2}$中，$\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{(2n-2)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}=1\times\overline{\mathrm{PA_4}}$

以此類推…，在四邊形$\mathrm{PA_1A}_n\mathrm{A_2}$中，$\frac{\sin\frac{(n+3)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{(n+2)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}=1\times\overline{\mathrm{PA}_n}$

…

在四邊形$\mathrm{PA_1A}_{2n}\mathrm{A_2}$中，$\frac{\sin\frac{3\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}=1\times\overline{\mathrm{PA_{2n}}}$

在四邊形$\mathrm{PA_1A}_{2n+1}\mathrm{A_2}$中，$\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+1\times\overline{\mathrm{PA_2}}=1\times\overline{\mathrm{PA_{2n+1}}}$

所以 $\frac{\overline{\mathrm{PA_3}}+\overline{\mathrm{PA_4}}+\overline{\mathrm{PA_5}}+\cdots+\overline{\mathrm{PA_{2n+1}}}}{\overline{\mathrm{PA_1}}+\overline{\mathrm{PA_2}}}=\frac{2[\sin\frac{2\pi}{2n+1}+\sin\frac{3\pi}{2n+1}+\cdots\cdots+\sin\frac{n\pi}{2n+1}]}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}+1$。

(ii)正 2n 邊形：

在四邊形$\mathrm{PA_1A_3A_2}$中，$1\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{(2n-2)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}=1\times\overline{\mathrm{PA_3}}$

在四邊形$\mathrm{PA_1A_4A_2}$中，$\frac{\sin\frac{(2n-2)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{(2n-3)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}=1\times\overline{\mathrm{PA_4}}$

以此類推…，在四邊形$\mathrm{PA_1A}_n\mathrm{A_2}$中，$\frac{\sin\frac{(n+2)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}=1\times\overline{\mathrm{PA}_n}$

…

在四邊形$\mathrm{PA_1A}_{2n-2}\mathrm{A_2}$中，$\frac{\sin\frac{4\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{3\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}=1\times\overline{\mathrm{PA}_{2n-2}}$

在四邊形$\mathrm{PA_1A}_{2n-1}\mathrm{A_2}$中，$\frac{\sin\frac{3\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{2\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}=1\times\overline{\mathrm{PA_{2n-1}}}$

在四邊形$\mathrm{PA_1A}_{2n}\mathrm{A_2}$中，$\frac{\sin\frac{2\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+1\times\overline{\mathrm{PA_2}}=1\times\overline{\mathrm{PA}_{2n}}$

所以 $\frac{\overline{\mathrm{PA_3}}+\overline{\mathrm{PA_4}}+\overline{\mathrm{PA_5}}+\cdots+\overline{\mathrm{PA_{2n}}}}{\overline{\mathrm{PA_1}}+\overline{\mathrm{PA_2}}}=\frac{2[\sin\frac{2\pi}{2n}+\sin\frac{3\pi}{2n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}]+\sin\frac{n\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}+1$。

2. 奇數邊(2n+1)正多邊形的外接圓上定點到奇頂點的距離和與到偶頂點的距離和相等

[證明]

(1)正五邊形　求證：$\frac{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}+\overline{PA_4}}{\overline{PA_3}+\overline{PA_5}}=1$

因為在四邊形$PA_1A_3A_2$中，$1\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$；

在四邊形$PA_1A_4A_2$中，$\frac{\sin\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_4}$；

在四邊形$PA_1A_5A_2$中，$\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_5}$，所以

$$\text{左式}=\frac{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}+\left(\frac{\sin\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_2}\right)}{\left(1\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_2}\right)+\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}\right)}=\frac{\left(1+\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\right)(\overline{PA_1}+\overline{PA_2})}{\left(1+\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\right)(\overline{PA_1}+\overline{PA_2})}=\frac{\left(\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}\right)(\overline{PA_1}+\overline{PA_2})}{\left(\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}\right)(\overline{PA_1}+\overline{PA_2})}=1\text{。}$$

(2)正七邊形　求證：$\frac{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}+\overline{PA_4}+\overline{PA_6}}{\overline{PA_3}+\overline{PA_5}+\overline{PA_7}}=1$

因為在四邊形$PA_1A_3A_2$中，$1\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{5\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$；

在四邊形$PA_1A_4A_2$中，$\frac{\sin\frac{5\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_4}$；

在四邊形$PA_1A_5A_2$中，$\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_5}$；

在四邊形$PA_1A_6A_2$中，$\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_6}$；

在四邊形$PA_1A_7A_2$中，$\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_7}$，

$$\text{所以左式}=\frac{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}+\left[\frac{\sin\frac{5\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_2}\right]+\left[\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_2}\right]}{\left[1\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{5\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_2}\right]+\left[\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_2}\right]+\left[\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\times\overline{PA_1}+1\times\overline{PA_2}\right]}$$

$$=\frac{\left[1+\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}+\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\right](\overline{PA_1}+\overline{PA_2})}{\left[1+\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}+\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\right](\overline{PA_1}+\overline{PA_2})}=\frac{(\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7})(\overline{PA_1}+\overline{PA_2})}{(\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7})(\overline{PA_1}+\overline{PA_2})}=1\text{。}$$

(3)正 2n+1 邊形　求證：$\frac{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}+\overline{PA_4}+\overline{PA_6}+\cdots+\overline{PA_{2n}}}{\overline{PA_3}+\overline{PA_5}+\overline{PA_7}+\cdots+\overline{PA_{2n+1}}}=1$

因為在四邊形$PA_1A_3A_2$中，$1\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_3}$

在四邊形$PA_1A_4A_2$中，$\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{PA_1}+\frac{\sin\frac{(2n-2)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{PA_2}=1\times\overline{PA_4}$

以此類推⋯，在四邊形$\mathrm{PA_1A}_n\mathrm{A_2}$中，$\frac{\sin\frac{(n+3)\pi}{2n}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{(n+2)\pi}{2n}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}=1\times\overline{\mathrm{PA}_n}$

⋯

在四邊形$\mathrm{PA_1A}_{2n}\mathrm{A_2}$中，$\frac{\sin\frac{3\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}=1\times\overline{\mathrm{PA_{2n}}}$

在四邊形$\mathrm{PA_1A}_{2n+1}\mathrm{A_2}$中，$\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+1\times\overline{\mathrm{PA_2}}=1\times\overline{\mathrm{PA_{2n+1}}}$

所以左式=

$$\frac{\begin{gathered}(\overline{PA_1}+\overline{PA_2})\\+\left[\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{(2n-2)\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}\right]+\left[\frac{\sin\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{(2n-4)\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}\right]\\+\cdots+\left[\frac{\sin\frac{5\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{4\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}\right]+\left[\frac{\sin\frac{3\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}\right]\end{gathered}}{\begin{gathered}\left[1\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}\right]+\left[\frac{\sin\frac{(2n-2)\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}\right]\\+\cdots+\left[\frac{\sin\frac{4\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+\frac{\sin\frac{3\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_2}}\right]+\left[\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}\times\overline{\mathrm{PA_1}}+1\times\overline{\mathrm{PA_2}}\right]\end{gathered}}$$

$$=\frac{[1+\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}+\frac{\sin\frac{3\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}+\cdots+\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}+\frac{\sin\frac{n\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}](\overline{PA_1}+\overline{PA_2})}{[1+\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}+\frac{\sin\frac{3\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}+\cdots+\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}+\frac{\sin\frac{n\pi}{2n+1}}{sin\frac{\pi}{2n+1}}](\overline{PA_1}+\overline{PA_2})}$$

$$=\frac{[sin\frac{\pi}{2n+1}+sin\frac{2\pi}{2n+1}+sin\frac{3\pi}{2n+1}+\cdots+sin\frac{(n-1)\pi}{2n+1}+sin\frac{n\pi}{2n+1}](\overline{PA_1}+\overline{PA_2})}{[sin\frac{\pi}{2n+1}+sin\frac{2\pi}{2n+1}+sin\frac{3\pi}{2n+1}+\cdots+sin\frac{(n-1)\pi}{2n+1}+sin\frac{n\pi}{2n+1}](\overline{PA_1}+\overline{PA_2})}=1$$

3. 偶數邊(2n)正多邊形的外接圓上定點到奇頂點的距離平方和與到偶頂點的距離平方和相等

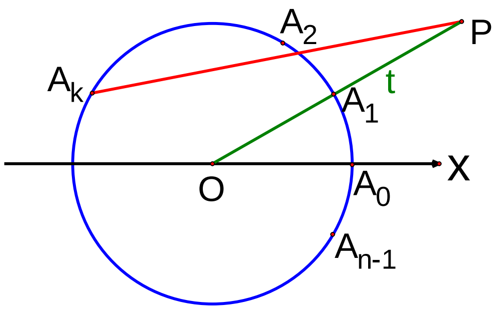
引理

設單位圓之內皆正 n 邊形為$A_0A_1A_2A_{n-1}$，P 是同平面上任一點且令 P 與單位圓圓心的距離為 t，則$\sum_{k=0}^{n-1}\overline{PA_k}^2 = n(t^2+1)$。

[證明]

在該平面上以圓心 O 為原點建立一個複數平面，令頂點A_k對應之複數為 $\omega^k(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，P 對應之複數為 Z，則

$$\sum_{k=0}^{n-1}\overline{PA_k}^2=\sum_{k=0}^{n-1}|Z-\omega^k|^2$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(Z-\omega^k)(\bar{Z}-\bar{\omega}^k)$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(|Z|^2-\omega^k\bar{Z}-\bar{\omega}^kZ+1)$$
$$\left(因為 Z\bar{Z}=|Z|^2，\omega^k\bar{\omega}^k=(\omega^k\cdot\bar{\omega}^k)=1\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(|Z|^2+1)-\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k\bar{Z}-\sum_{k=0}^{n-1}\bar{\omega}^kZ$$
$$=\mathrm{n}(|Z|^2+1)$$
$$=\mathrm{n}(t^2+1)。$$



圖十

$$\left(\begin{array}{c}因為 \sum_{k=0}^{n-1}\omega^k\bar{Z}=\bar{Z}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k=Z(1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1})=\bar{Z}\cdot 0=0，\\ 同理\sum_{k=0}^{n-1}\bar{\omega}^kZ=0\end{array}\right)$$

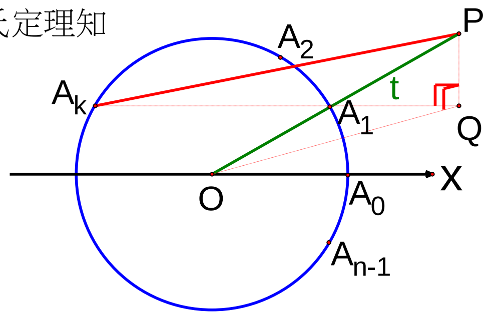
推論

在引理中，當 P 不在正 n 邊形所在之平面上，而為空間中任一點時，則結論亦成立。

[證明]

令 P 在正 n 邊形所在之平面上的正射影為 Q，則由畢氏定理知

$$\sum_{k=0}^{n-1}\overline{PA_k}^2=\sum_{k=0}^{n-1}(\overline{PQ}^2+\overline{QA_k}^2)=n\overline{PQ}^2+\sum_{k=0}^{n-1}\overline{QA_k}^2$$
$$=\mathrm{n}\overline{PQ}^2+n(\overline{OQ}^2+1)(由引理知)$$
$$=\mathrm{n}(\overline{PQ}^2+\overline{OQ}^2+1)$$
$$=\mathrm{n}(\overline{OP}^2+1)(畢氏定理)$$
$$=\mathrm{n}(t^2+1)。$$



圖十一

定理

當 P 為正 N 邊形的外接圓上任一點，則其與內接正 n 邊形奇頂點之距離的平方和等於偶頂點之距離的平方和，即兩者的比值為 1。

[證明]

因 n 為偶數，故正 n 邊形之奇頂點及偶頂點均構成一個正$\frac{n}{2}$邊形，利用上面引理可得正 N 邊形的外接圓上任一點到此正 n 邊形之奇頂點及偶頂點之距離的平方和均為 $\frac{n}{2}(t^2+1)$，故相等。

參、結論

一、正 N 邊形的外接圓上定點到遠頂點的距離和與最近兩頂點的距離和之比值為定值。

(1)正$2n+1$ 邊形：

$$\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\cdots\cdots+\overline{PA_{2n+1}}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=\frac{2[\sin\frac{2\pi}{2n+1}+\sin\frac{3\pi}{2n+1}+\cdots\cdots+\sin\frac{n\pi}{2n+1}]}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}+1$$

(2)正 2n 邊形：

$$\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_4}+\overline{PA_5}+\cdots\cdots+\overline{PA_{2n}}}{\overline{PA_1}+\overline{PA_2}}=\frac{2[\sin\frac{2\pi}{2n}+\sin\frac{3\pi}{2n}+\cdots\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}]+\sin(\frac{n}{2n})\pi}{\sin\frac{\pi}{2n}}+1$$

二、奇數邊正多邊形的外接圓上定點到奇頂點的距離和與到偶頂點的距離和相等。

三、偶數邊正多邊形的外接圓上定點到奇頂點的距離平方和與到偶頂點的距離平方和相等。

肆、引註資料

一、游森棚(106 年 9 月)。森棚教官的數學題：正三角形的線段定和。科學研習月刊，第 56 卷第 10 期。
file:///C:/Users/User/Downloads/56-10-9%E6%AD%A3%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2%E7%9A%84%E7%B7%9A%E6%AE%B5%E5%AE%9A%E5%92%8C_3464.pdf
二、洪誌雄著。輕鬆學好高中數學。小五南出版社，P202~227。

三、黃家禮編著。幾何明珠。九章出版社，P71~82。