投稿類別：數學類

篇名：
平方迴文數

作者：
謝柏陞。西苑高中。高二 6 班
羅紜萱。西苑高中。高二 8 班

指導老師：
邱柏翔老師
陳威旭老師

壹、前言

一、研究動機

在學校生活中，每天都會接觸到數學這門學科，而我們透過觀察數字，發現迴文數不論由前往後或由後往前念的數字順序皆相同的神奇之處，並決定深入研究，在探討的其中，發現有些完全平方數亦是迴文數，進而縮小範圍探討完全平方數跟迴文數之間的關係。

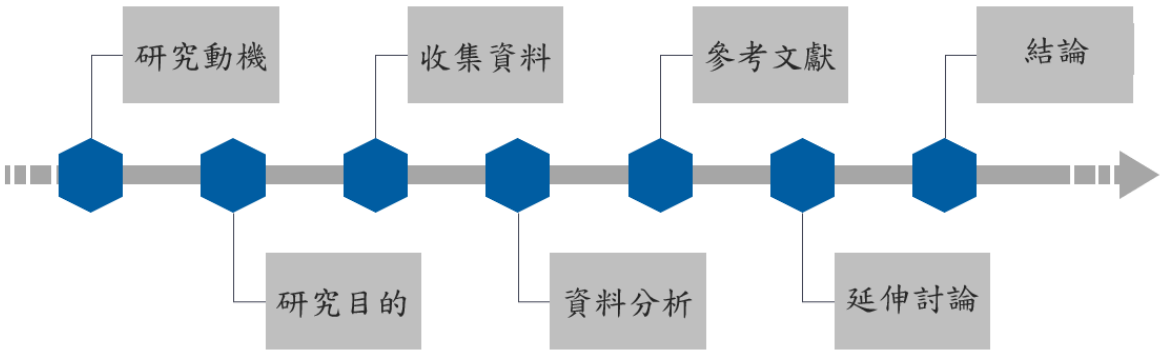
二、研究目的

找出各組數字間的規律以及通式，並證明。而進階目的是讓各組通式發展一套自己的系統，使部分通式可以互相串聯，且規律相似。

三、研究方法

(一)Python－做高位數計算，減少計算的錯誤並提高效率。
(二)Excel－做資料統整，透過假設找出解決方法及通式。
(三)二項式定理及數學歸納法－證明驗證通式是否正確、方法是否可行。

四、研究架構



圖一：研究架構圖
（圖片來源：自製）

貳、正文

一、迴文數的介紹

迴文數之所以叫迴文數，正是因為其前後對稱，由前往後念或由後往前念會得到相同的數字，巴克敏斯特·福樂也將迴文數稱作**沙拉扎數**（SCheherazade Numbers）。不論以何種進位制度進行，都將有無窮個迴文數。而這次的討論主題為「平方迴文數」，則是將迴文數和完全平方數一同探討其是否有關聯。

二、迴文數

原數	平方	原數	平方	原數	平方	原數	平方
11	121	2002	4008004	30693	942060249	1042151	1086078706801
22	484	2285	5221225	100001	10000200001	1100011	1210024200121
26	676	2636	6948496	101101	10221412201	1101011	1212225222121
101	10201	10001	100020001	110011	12102420121	1102011	1214428244121
111	12321	10101	102030201	111111	12345654321	1109111	1230127210321
121	14641	10201	104060401	200002	40000800004	1110111	1232346432321
202	40804	11011	121242121	798644	637832238736	1111111	1234567654321
212	44944	11111	123454321	1000001	1000002000001	1270869	1615108015161
264	69696	11211	125686521	1001001	1002003002001	2000002	4000008000004
307	94249	20002	400080004	1002001	1004006004001	2001002	4004009004004
836	698896	20102	404090404	1010101	1020304030201	2012748	4051154511504
1001	1002001	22865	522808225	1011101	1022325232201	2294675	5265533355625
1111	1234321	24846	617323716	1012101	1024348434201	3069307	9420645460249

圖二：迴文數統整 1、圖三：迴文數統整 2

（圖片來源：自製）

三、未進位之迴文數規律討論

（一）

$a_1: 11^2 = 121 = 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$

$a_2: 101^2 = 10201 = 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 1$

$a_3: 1001^2 = 1002001 = 10^6 + 2 \cdot 10^3 + 1$

公式:$(10^n + 1)^2 = (10^{2n} + 1) + 2(10^n)$

證明:

$$(10^n + 1)^2 = C_2^2 10^{2n} + C_1^2 10^n \cdot 1 + C_0^2 1^2 = (10^{2n} + 1) + 2 \cdot 10^n$$

（二）

$a_1: 22^2 = 484 = 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4$

$a_2: 202^2 = 40804 = 4 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^2 + 4$

$a_3: 2002^2 = 4008004 = 4 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^3 + 4$

公式:$[2 \cdot (10^n + 1)]^2 = 4(10^{2n} + 1) + 8(10^n)$

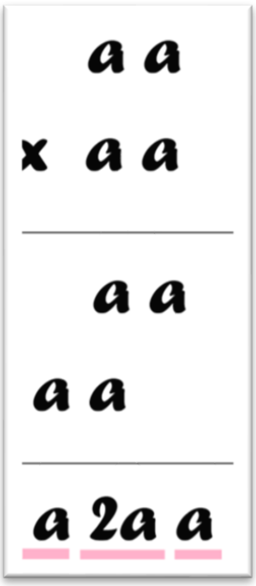
證明:

$[2 \cdot (10^n + 1)]^2 = 4 \cdot C_2^2 10^{2n} + 4 \cdot C_1^2 10^n \cdot 1 + C_0^2 1^2 = 4(10^{2n} + 1) + 8 \cdot 10^n$

統整（一）、（二）的公式，可知此規律的通式為:

$[k(10^n + 1)]^2 = k^2(10^{2n} + 1) + 2 \cdot k^2 \cdot 10^n$

由（一）、（二）可知，將（一）原數乘上 2，展開後結果會為 2^2倍，而原數乘上 3，展開後結果則會打破 I、II 的規律。以原數 11 為例，將原數乘上 2 後，展開後結果為$(11 \cdot 2)^2 = [2\,(10 + 1)]^2 = 4(10^2 + 1) + 2 \cdot 4 \cdot 10 = 484$，$22^2$為平方迴文數；若將原數乘上 3，展開後結果為$(11 \cdot 3)^2 = [3(10 + 1)]^2 = 9(10^2 + 1) + 2 \cdot 9 \cdot 10 = 909 + 180 = 1089$，$33^2$不是迴文數。由上述例子可知，若各個位數平方後之總和≥10（也就是圖一中$2a \geq 10$），即打破迴文數之規則。



圖四：進位概念圖

（圖片來源：自製）

（三）

$111^2 = 12321$

$10101^2 = 102030201$

$1001001^2 = 1002003002001$

公式: $(10^{2n} + 10^n + 1)^2 = (10^{4n} + 1) + 2 \cdot 10^n(10^{2n} + 1) + 3 \cdot 10^{2n}$

證明:

$(10^{2n}+10^{n}+1)^2$

$=[(10^{2n})+(10^{n}+1)]^2$

$=C_0^2 10^{4n}+C_1^2(10^{2n})(10^{n}+1)+C_2^2(10^{n}+1)^2$

$=C_0^2 10^{4n}+C_1^2 10^{3n}+C_1^2 10^{2n}+C_2^2[C_0^2\cdot 10^{2n}+C_1^2 2\cdot 10^{n}+C_2^2\cdot 1^2]$

$=C_0^2 10^{4n}+C_1^2 10^{3n}+C_1^2 10^{2n}+C_2^2 C_0^2 10^{2n}+C_2^2 C_1^2 10^{n}\cdot 1+C_2^2 C_2^2 1^2$

$=10^{4n}+2\cdot 10^{3n}+3\cdot 10^{2n}+2\cdot 10^{n}+1$

$=(10^{4n}+1)+2\cdot 10^{n}\cdot(10^{2n}+1)+3\cdot 10^{2n}$

（四）

a_1: $121^2=14641$

a_2: $10201^2=104060401$

a_3: $1002001^2=1004006004001$

公式: $(10^{2n}+2\cdot 10^{n}+1)^2=(10^{4n}+1)+4\cdot 10^{n}(10^{2n}+1)+6\cdot 10^{2n}$

證明:

$(10^{2n}+10^{n}+1)^2$

$=[10^{2n}+(10^{n}+1)]^2$

$=C_0^2 10^{4n}+C_1^2(10^{2n})(2\cdot 10^{n}+1)+C_2^2(2\cdot 10^{n}+1)^2$

$=C_0^2 10^{4n}+C_1^2\cdot 2\cdot 10^{3n}+C_1^2\cdot 10^{2n}\cdot 1$

$+C_2^2[c_0^2(2\cdot 10^{n})^2+C_1^2\cdot 2\cdot 10^{n}\cdot 1+c_2^2\cdot 1^2]$

$=C_0^2 10^{4n}+C_1^2\cdot 2\cdot 10^{3n}+C_1^2 10^{2n}$

$+C_2^2 C_0^2(2^2\cdot 10^{2n})+C_2^2 C_0^2(2\cdot 10^{n})+C_2^2 c_2^2\cdot 1$

$=10^{4n}+4\cdot 10^{3n}+2\cdot 10^{2n}+4\cdot 10^{2n}+4\cdot 10^{n}+1$

$=(10^{4n}+1)+4\cdot 10^{n}(10^{2n}+1\ )+6\cdot 10^{2n}$

（五）

a_1: $11011^2=121242121$

a_2: $110011^2=12102420121$

a_3: $1100011^2=1210024200121$

公式:$(10^{n+3}+10^{n+2}+10+1)^2$

$=(10^{2n+6}+1)+2\cdot 10(10^{2n+4}+1)+10^2(10^{2n+2}+1)$

$+2\cdot 10^{n+2}(10^2+1)+4\cdot 10^{n+3}$

證明:

$(10^{n+3}+10^{n+2}+10+1)^2$

$=[(10^{n+3}+10^{\mathrm{n}+2})+(10+1)]^2$

$=\mathrm{C}_0^2(10^{\mathrm{n}+3}+10^{\mathrm{n}+2})^2+\mathrm{C}_1^2(10^{n+3}+10^{\mathrm{n}+2})(10+1)+\mathrm{C}_2^2(10+1)^2$

$=\mathrm{C}_0^2[\mathrm{C}_0^2 10^{2n+6}+\mathrm{C}_1^2(10^{\mathrm{n}+3})(10^{\mathrm{n}+2})+\mathrm{C}_2^2 10^{2\mathrm{n}+4}]$

$+\mathrm{C}_1^2(10^{\mathrm{n}+4}+10^{\mathrm{n}+3}+10^{\mathrm{n}+3}+10^{\mathrm{n}+2})$

$+C_2^2[C_0^2 10^2 + C_1^2 \cdot 10 \cdot 1 + C_2^2 1^2]$
$= C_0^2 C_0^2 10^{2n+6} + C_0^2 C_1^2 10^{2n+5} + C_0^2 C_2^2 10^{2n+4}$
$+C_1^2 10^{n+4} + C_1^2 \cdot 2 \cdot 10^{n+3} + C_1^2 10^{n+2} + C_2^2 C_0^2 10^2 + C_2^2 C_1^2 10 + C_2^2 C_2^2 1$
$= 10^{2n+6} + 2 \cdot 10^{2n+5} + 10^{2n+4}$
$+2 \cdot 10^{n+4} + 4 \cdot 10^{n+3} + 2 \cdot 10^{n+2} + 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$
$= (10^{2n+6} + 1) + 2 \cdot 10(10^{2n+4} + 1) + 10^2(10^{2n+2} + 1)$
$+2 \cdot 10^{n+2}(10^2 + 1) + 4 \cdot 10^{n+3}$

（六）
$a_1: 1111^2 = 1234321$
$a_2: 1010101^2 = 1020304030201$
$a_3: 1001001001^2 = 1002003004003002001$
公式:$(10^{3n} + 10^{2n} + 10^n + 10)^2 = (10^{6n} + 1) + 2 \cdot 10^n(10^{4n} + 1)$
$+3 \cdot 10^{2n}(10^2 + 1) + 4 \cdot 10^{3n}$
證明:
$(10^{3n} + 10^{2n} + 10^n + 10)^2$
$= [(10^{3n} + 10^{2n}) + (10^n + 1)]^2$
$= C_0^2(10^{3n} + 10^{2n})^2 + C_1^2(10^{3n} + 10^{2n})(10^n + 1) + C_2^2(10^n + 1)^2$
$= C_0^2[c_0^2 10^{6n} + C_1^2(10^{3n})(10^{2n}) + C_2^2 10^{4n}]$
$+C_1^2(10^{4n} + 10^{3n} + 10^{3n} + 10^{2n}) + C_2^2[C_0^2 10^{2n} + C_1^2 10^n \cdot 1 + C_2^2 1^2]$
$= C_0^2 C_0^2 10^{6n} + C_0^2 C_1^2 10^{5n} + C_0^2 C_2^2 10^{4n}$
$+C_1^2 10^{4n} + C_1^2 \cdot 2 \cdot 10^{3n} + C_1^2 10^{2n} + C_2^2 C_0^2 10^{2n} + C_2^2 C_1^2 10^n + C_2^2 C_2^2 1$
$= 10^{6n} + 2 \cdot 10^{5n} + 3 \cdot 10^{4n} + 4 \cdot 10^{3n} + 3 \cdot 10^{2n} + 2 \cdot 10^n + 1$
$= (10^{6n} + 1) + 2 \cdot 10^n(10^{4n} + 1) + 3 \cdot 10^{2n}(10^2 + 1) + 4 \cdot 10^{3n}$

（七）
$a_1: 10101^2 = 102030201$
$a_2: 101101^2 = 10221412201$
$a_3: 1011101^2 = 1022325232201$

計算方法:利用乘法公式:$(A + 100B)^2 = A^2 + 200AB + 10000B^2$將計算拆成兩個部分，最後再將其合併（舉$10101^2$為例，將其拆解成$[10001 + (1 \cdot 100)]^2 = 10001^2 + 2 \cdot 10001 \cdot (1 \cdot 100) + (1 \cdot 100)^2$，由上述可知，$A$為10001，$100B$為$100 \cdot 1$，以此類推。）

A^2:
令$a_n = 10^{n+3} + 1$
　$a_1^2: 10001^2 = 100020001 = 10^8 + 2 \cdot 10^4 + 1$

$a_2^2: 100001^2 = 10000200001 = 10^{10} + 2 \cdot 10^5 + 1$

$a_3^2: 1000001^2 = 1000002000001 = 10^{12} + 2 \cdot 10^6 + 1$

$\rightarrow a_n^2 = (10^{n+3})^2 + 2 \cdot 10^{n+3} \cdot 1 + 1^2 = 10^{2n+6} + 2 \cdot 10^{n+3} + 1$

公式:$a_n^2 = 10^{2n+6} + 2 \cdot 10^{n+3} + 1$

B^2:

令$b_n = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1$

$b_1^2: 1^2 = 1 = 1$

$b_2^2: 11^2 = 121 = 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1$

$b_3^2: 111^2 = 12321 = 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1$

公式:$b_n^2 = 1 \cdot 10^{2n-2} + 2 \cdot 10^{2n-3} + \cdots + (n-1) \cdot 10^n + n \cdot 10^{n-1}$

$+(n-1) \cdot 10^{n-2} + \cdots + 2 \cdot 10^1 + 1$

$2AB$:

$2a_n \cdot b_n = 2 \cdot (10^{n+3} + 1) \cdot (10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10^1 + 1)$

$= 2 \cdot (10^{2n+2} + 10^{2n+1} + \cdots + 10^{n+4} + 10^{n+3} + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10^1 + 1)$

公式合併:$(A + 100B)^2 = A^2 + 200AB + 10000B^2$

證明:

$(a_n + 100b_n)^2$

$= a_n^2 + 2 \cdot 10^2 \cdot a_n b_n + 10^4 \cdot b_n^2$

$= 1 \cdot 10^{2n+6} + 2 \cdot 10^{n+3} + 1$

$+2 \cdot 10^2(10^{2n+2} + 10^{2n+1} + \cdots + 10^{n+4} + 10^{n+3} + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10^1$

$+1)$

$+10^4 \cdot (1 \cdot 10^{2n-2} + 2 \cdot 10^{2n-3} + \cdots + (n-1) \cdot 10^n + n \cdot 10^{n-1} + (n-1) \cdot$
$10^{n-2} + \cdots + 2 \cdot 10^1 + 1)$

$= 1 \cdot 10^{2n+6} + 2 \cdot 10^{n+3} + 1$

$+2 \cdot 10^{2n+4} + 2 \cdot 10^{2n+3} + \cdots + 2 \cdot 10^{n+6} + 2 \cdot 10^{n+5} + 2 \cdot 10^{n+1} + 2 \cdot 10^n + \cdots$

$+2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2$

$+1 \cdot 10^{2n+2} + 2 \cdot 10^{2n+1} + \cdots + (n-1) \cdot 10^{n+4} + n \cdot 10^{n+3} + (n-1) \cdot 10^{n+2} + \cdots$

$+2 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4$

$= 1 \cdot 10^{2n+6} + 2 \cdot 10^{2n+4} + 2 \cdot 10^{2n+3} + 3 \cdot 10^{2n+2} + \cdots + (n-1) \cdot 10^{n+6}$

$+ n \cdot 10^{n+5} + (n-1) \cdot 10^{n+4} + (n+2) \cdot 10^{n+3} + (n-1) \cdot 10^{n+2} + n \cdot 10^{n+1}$

$+ (n-1) \cdot 10^{n} + \cdots + 4 \cdot 10^{5} + 3 \cdot 10^{4} + 2 \cdot 10^{3} + 2 \cdot 10^{2} + 1$

$= 1 \cdot (10^{2n+6} + 1) + 2 \cdot (10^{2n+4} + 10^{2}) + 2 \cdot (10^{2n+3} + 10^{3})$

$+ 3 \cdot (10^{2n+2} + 10^{4}) + \cdots + (n-1) \cdot (10^{n+6} + 10^{n})$

$+ n \cdot (10^{n+5} + 10^{n+1}) + (n-1) \cdot (10^{n+4} + 10^{n+2}) + (n+2) \cdot 10^{n+3}$

表一：次方數與係數對照表（來源:自製）

10^m	$2n+6$	$2n+5$	…	$n+5$	$n+4$	$n+3$	$n+2$	$n+1$	…	1	0
係數	1	0	…	$n-2$ $+2$	$n-1$ $+0$	$n+2$	$n-1$ $+0$	$n-2$ $+2$	…	0	1

四、已進位之迴文數討論

表二：項數及規律圖（來源:自製）

a_n	number	a_n^2
a_1	3	9
a_2	307	94249
a_3	30693	942060249
a_4	3069307	9420645460249
a_5	306930693	94206450305460249
a_6	30693069307	942064503484305460249
a_7	3069306930693	9420645034800084305460249
a_8	306930693069307	94206450348005140084305460249
a_9	30693069306930693	942064503480050971140084305460249

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 100a_{n-1} + (-1)^n \cdot 7\text{，n} \geq 2 \end{cases}$$

由表(三)可知，此表數字的規律為由中間向外增加數字以至於其為平方迴文數。且以著色跟未著色數字做為區隔，著色區塊的數字為等差型態的迴文數字，未著色區塊亦同，其公差皆為±3。

參、結論

在此次研究中發現了未進位平方迴文數的規律會和各個位數平方相加小於10有關，因為若各個位數平方的和≥ 10會進位導致迴文狀態改變〔假設一數字為$(abcba)^2$，則$a^2+b^2+c^2+b^2+a^2<10$〕，也發現$3^2 \rightarrow 307^2 \rightarrow 30693^2 \cdots$為進位後產生的平方迴文數，而在此進位產生的迴文數中，雖然計算中會有進位的情況產生，但是，當著色區塊的等差型態數字出現進位或退位後，則打破迴文的規律。在尋找未進位的平方迴文數時，發現規律為無限多種，只要在各個位數之間插入相同數量的0，即可產生規律相同的迴文數。

另外在這次研究中，亦發現似乎還有其他規律的進位迴文數，例如:26、264、836、2636此組數字的平方亦為迴文數，其規律為我們接下來的研究目標。

肆、引註資料

中央研究院數學研究所(2017)。迴文數定理與迴文數幻方。**數學傳播,41 卷 2 期**,80-95。
中央研究院數學研究所(2017)。反向倍數知多少。**數學傳播,41 卷 3 期**, 60-69。
昌爸工作坊。2021 年 3 月 12 日,取自 http://www.mathland.idv.tw/fun/palindrome.htm