投稿類別：數學類

篇名：
畢定有理 —畢氏定理

作者：
張芯沛。新北市立永平高級中學。高一 105 班

指導老師：張鈞量老師

壹、前言

一. 研究動機

從國中二年級開始，不論願不願意，畢氏定理便「陰魂不散」地出現在數學題目裡頭。經過老師教導後，凡是在解與直角三角形有關的題目時，一定會聯想到畢氏定理，不管解題方式是否與它有關。若干年後，當回憶起從前學過的數學內容，大多數的人對於畢氏定理是什麼還是能夠說出個十之八九吧！然而畢氏定理的證明有好幾百種，在國中階段的課本內容卻只輕描淡寫地說明兩到三種。這次希望能透過研究此定理，延伸學習到更多更深、更特別，使用多方面的證明方法，同時簡潔地整理出幾個較具有獨特性的證明。

二. 研究目的

探討畢氏定理是否能夠證明三角形面積的海龍公式

(一) 認識畢氏定理、畢氏三元數組

(二) 了解基本證明

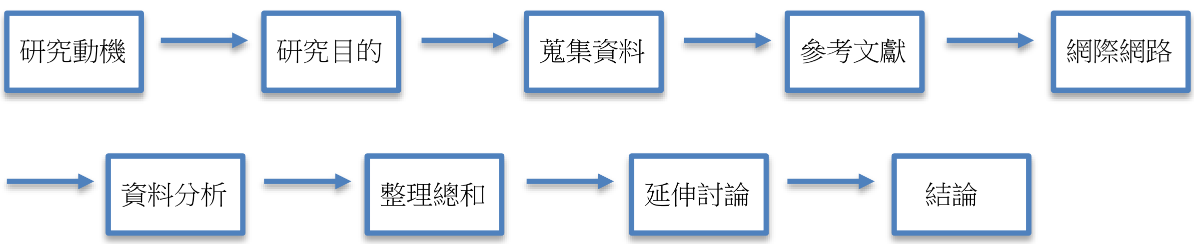
(三) 搜集相關資料「畢氏定理證明」

(四) 利用畢氏定理證明海龍公式

三. 研究方法

透過網路進行資料搜集，參考書中資訊進行探討和蒐集資料。

四. 研究架構



貳、正文

一、畢氏定理的由來

畢氏定理，又稱畢達哥拉斯定理（Pythagoras theorem）、商高定理、新娘座椅定理、百牛定理。「畢氏定理」是因古希臘的畢達哥拉斯（Pythagoras）證明而得名。據說，畢達哥拉斯證明了這一定理後欣喜若狂，便叫他的門人宰了一百頭牛大肆慶

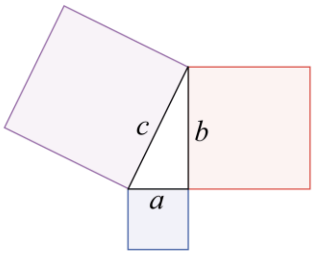
祝。因此，這個定理也被暱稱為「百牛定理」。畢氏定理說明，平面上的直角三角形的兩條直角邊的長度（古稱勾長、股長）的平方和等於斜邊長（古稱弦長）的平方。反之，若平面上三角形中兩邊長的平方和等於第三邊邊長的平方，則它是直角三角形（直角所對的邊是第三邊）。畢氏定理是人類早期發現並證明的重要數學定理之一。據《周髀算經》中記述，西元前一千多年周公與商高論數的對話中，商高就以三四五 3 個特定數為例詳細解釋了畢氏定理要素，其一，“以為勾的廣三，股修四，徑隅五”。其二，“既方其外，半之一矩，環而共盤，得成三四五。兩矩共長二十有五，是謂積矩。”首先肯定一個底寬為三，高為四的直角三角形，弦長必定是五。最重要的是緊接著論證了弦長平方必定是兩直角邊的平方和，確立了直角三角形兩條直角邊的平方和等於斜邊平方的判定原則。其判定方法後世不明其法而被忽略。此外，《周髀算經》中明確記載了石一言後人陳子敘述的畢氏定理公式：“若求邪至日者，以日下為勾，日高為股，勾股各自乘，並而開方除之，得邪至日”。

古埃及在西元前 2600 年的紙莎草就有（3、4、5）這一組勾股數，而古巴比倫泥板涉及的最大的一個勾股陣列是（12709、13500、18541）。

二、畢氏三元數

畢氏三元數，又名商高數或勾股數（Pythagorean triple），是由三個正整數組成的數組，且能符合畢氏定理（畢式定理）「$a^2+b^2=c^2$」之中，（a、b、c）的正整數解。而且基於畢氏定理的逆定理，任何邊長是畢氏三元數的三角形都必為直角三角形。如果（a、b、c）是畢氏三元數，它們的正整數倍數也是畢氏三元數，即（na、nb、nc）也是畢氏三元數。若（a、b、c）三者互質（它們的最大公因數是 1），則稱它們為**素畢氏三元數**。

畢氏三元數出現得較早，例如埃及的紙草書裡面就有（3、4、5）這一組畢氏三元數，而巴比倫泥板涉及的最大一個畢氏三元數組是（13500、12709、18541）。後來的中國的算經、印度與阿拉伯的數學書也有記載。在中國，《周髀算經》中也記述了（3、4、5）這一組畢氏三元數，商高答周公問曰：「勾廣三，股備四，徑隅五」；三國時代的趙爽對《周髀算經》內的畢氏定理作出了詳細注釋：「勾股個自乘，並之，為弦實，開方除之，即弦」。《九章算術》卷第九《句股》章詳細討論了畢氏定理的運用，魏國數學家劉徽反復運用畢氏定理求圓周率。金朝數學家李冶的《測圓海鏡》通過勾股容圓圖式的十五個勾股形和直徑的關係，建立了系統的天元術，推導出 692 條關於勾　　股形的各邊的公式，其中用到了多組勾股數作為例子。



三、畢氏定理證明

（一） 畢達哥拉斯的證明

對於勾股定理，有三種不同的理解，當然表達的方式也就不同。

1. 在直角三角形斜邊上的正方形等於直角邊上的兩個正方形。

   這就是歐幾里得《幾何原本》卷 I 第 47 命題。這裡講的純粹是幾何圖形之間的關係，完全不牽涉到「數」的問題；所謂『相等』是指圖形的拼補相等，即將兩個小正方形剖分成若干塊，可拼湊成斜邊上的大正方形。因為既然沒牽涉到數，也就無所謂的『和』（相加），故命題的原文並無『和』的字眼出現。

2. 直角三角形直角邊上兩個正方形面積的和等於斜邊上正方形的面積。

   這裡將圖形的面積看成一個數，由定理指出這兩個數的和等於第三個數。須注意的是歐幾里得從來沒有將面積看成是一個數來加以運算。

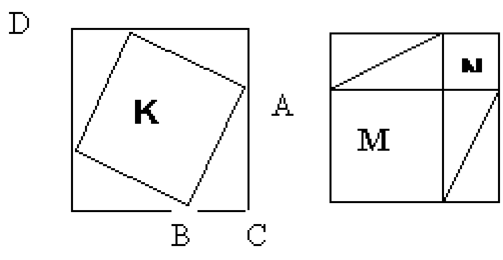
3. 直角三角形斜邊長度的平方等於兩個直角邊長度平方之和。

   長度是數，平方之後還是數，定理講的是數與數之間的關係，並不考慮數字平方之後的幾何意義。

這三種說法的意義是不同的。第一種稱之為『形的勾股定理』，第二、三種稱之為『數的勾股定理』。

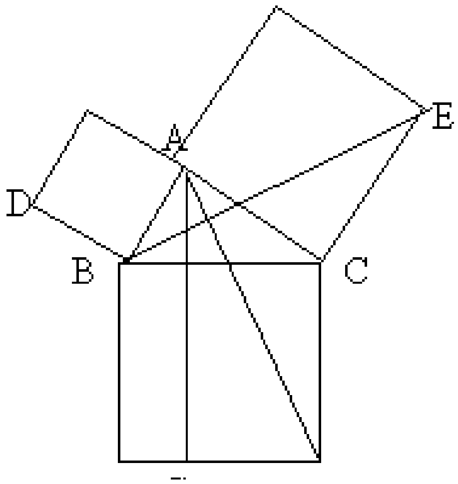
至於「形的勾股定理」後人認為畢達哥拉斯學派應的確發現並給予證明，而被爾後的歐幾里得編入《幾何原本》之中。對於他們是如何證明的呢？關於這一點，之後的數學家做了許多合乎情理的推測。

這個學派曾研究過地磚的問題，利用等腰直角三角形來舖成一個正方形地板是很常見的， 從圖形上不難看出直角邊上的兩個正方形合起來正好是斜邊上的正方形！受此啟發，自然推想到非等腰直角三角形的這個關係應也能成立。在眾多猜測中，下面的這一種證法應是比較貼近畢達哥拉斯的證法（由印度數學家拜斯卡拉 • 阿查亞 Bhaskara-Acharya 提出，但那已是公元 1150 年的時候，比中國三國時代的趙君卿晚了一千年，此事稍後再敘）。



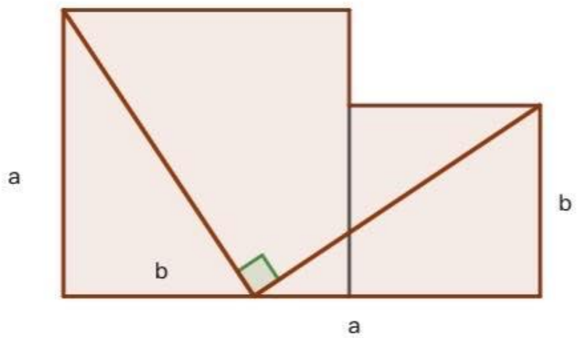
任給直角三角形 ABC，邊長各為 a，b，c；以 a＋b 為邊作正方形，它是由 4 個全等三角形和 c 邊上的正方形所拼成。如果將這些三角形重新排列，便可看出正方形 CD 也可由同樣的 4 個三角形及 a、b 邊上的兩個正方形拼成。故得知：正方形 K＝正方形 M＋正方形 N。

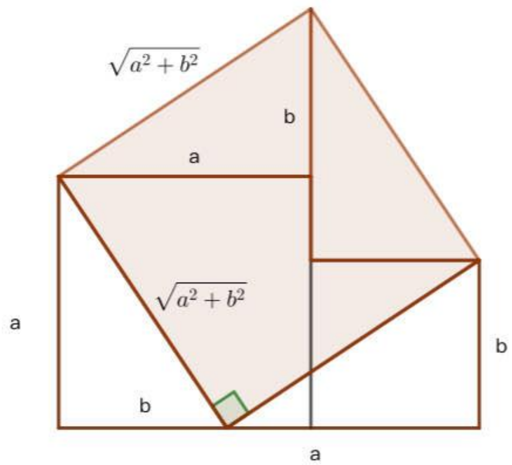
（二） 歐幾里得證明



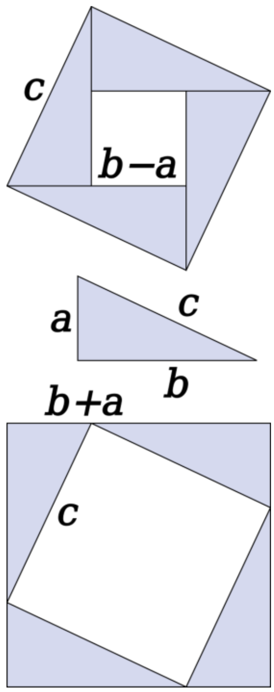
在歷史上，完整而嚴密的最早證明應屬歐幾里得《幾何原本》卷 I 第 47 命題的證法，其要點如下：設□AD，□AE，□BF 分別為直角△ABC 三邊上的正方形；連接 BE、AF，作 AG⊥BC；可得知△BCE≅△ABC，但□AE 面積是△BCE 的 2 倍（同底等高），同樣□GE 是△FCA 的 2 倍，故□GE＝□AE；同理可證，□BG＝□AD，於是□BF＝□BG＋□GC＝□AD＋□AE。

（三） 圖解證明





（四） 使用代數等式證明

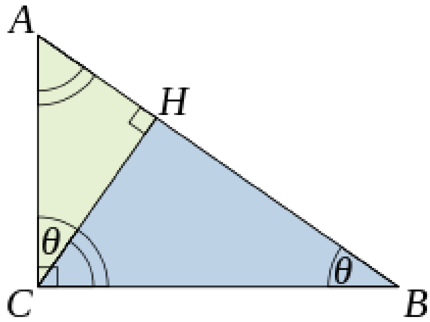


最頂的正方形邊長為 c，內嵌 4 個直角三角形，所以中間的小正方形邊長為 b－a（假設 b 較長）。 正方形面積等如 4 個三角形面積加上小正方形面積，由於三角形面積為 ab/2，根據等式（b－a）^{2}＝b^2－2ab＋a^2，我們知道：
c^2＝（b－a）^{2}＋4（ab/2）＝b^2－2ab＋a^2＋2ab＝b^2＋a^2，這就得出 $a^2+b^2=c^2$。

至於圖下面的正方形，除了如第一個證明般搬動那些三角形外，亦可以利用等式（a＋b）^{2}＝a^2＋2ab＋b^2。由於大正方形面積為（a＋b）^{2}，小正方形面積為 c^2，我們知道：

$$(a+b)^2=c^2+4(ab/2)$$
$$\Rightarrow a^2+2ab+b^2=c^2+2ab$$
$$\Rightarrow a^2+b^2=c^2$$

（五） 利用相似三角形證明

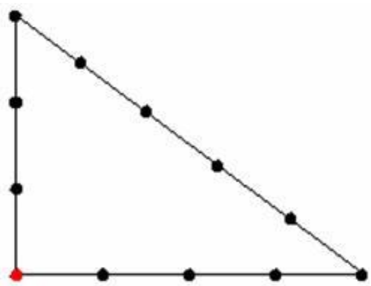


設 ABC 為一直角三角形，直角於∠C（見右圖）。從點 C 畫上三角形的高，並將此高與 AB 的交叉點稱之為 H。此新△ACH 和原本的△ABC 相似，因為在兩個三角形中都有一個直角（這又是由於「高」的定義），而兩個三角形都有 A 這個共同角，由此可知第三隻角都是相等的。同樣道理，△CBH 和△ABC 也是相似的。這些相似關係衍生出以下的比率關係：

因為 BC＝a，AC＝b，且 AB＝c，所以 $\frac{a}{c}=\frac{HB}{a}$ 且 $\frac{b}{c}=\frac{AH}{b}$ 可以寫成 a^2＝c × HB 且$b^2=c\times \mathrm{AH}$

綜合這兩式子，我們得到$a^2+b^2=c\times \mathrm{HB}+\mathrm{c}\times \mathrm{AH}=\mathrm{c}\times(\mathrm{HB}+\mathrm{AH})=c^2$。換句話說：$a^2+b^2=c^2$

四、畢氏三元數的由來



歷史學家猜測西元前 2000 年左右，埃及人已經懂得使用畢氏三元數的關係來得到直角，這造就了他們在建築學上的非凡成就。他們先取 12 段等長的繩索接成一個圓環，接著固定一個接點，將圓環撐開，使其形成一個三角形，與固定點相連的兩邊分別是 3 段繩索與 4 段繩索，如右圖：便得到一個邊長為 3，4，5 的直角三角形。如果一個三角形的三邊滿足$c^2=a^2+b^2$則此三角形為一個以 c 為斜邊的直角三角形這個方法利用了畢氏定理的反定理。

另外比畢達哥拉斯早一千年的巴比倫人，也已經會使用畢氏定理。在巴比倫，農人的財富是看他的莊稼產量，而莊稼的多寡又取決於此人擁有多少耕地面積。由這個角度來看，財富是用平方數 (即正方形數)來計算:土地的面積即為該地長寬相乘之積，一塊長、寬都為 a 的土地，面積極為 a 的平方。巴比倫人感興趣的是，一個整數的平方是否可分割為其他數的平方和，以及什麼數可以如此被分割。若假農夫有一塊 25 平方單位的土地，他便可以用它來交換兩塊土地，其中之一的面積為平方單位，另一塊則是 9 平方單位，這表示一塊 5 × 5 的土地面積與一塊 4 × 4 和一塊 3 × 3 的土地面積總和相等。因此，$5^2=3^2+4^2$對巴比倫人來說是一個實際問題的解答。

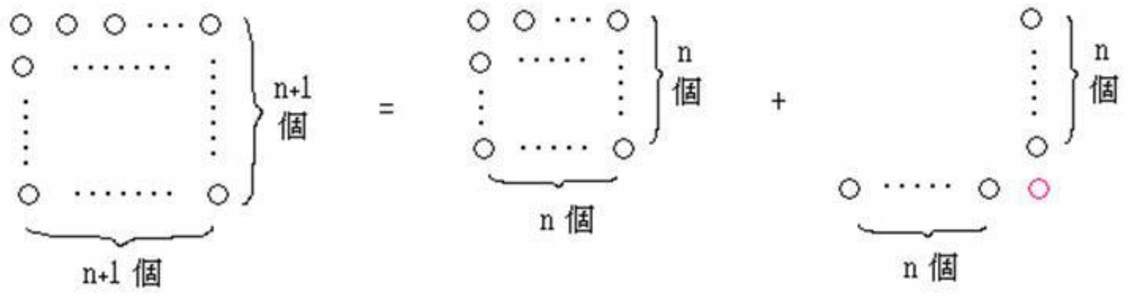
在四十年代，考古學家紐格包爾（O.Neugebeuer）即沙爾斯（A.Sachs）發現了著名的普林頓 322 號泥板書（Plimpton322，現存於哥倫比亞大學博物館），據考證應存在於西元前 1900 至 1600 年左右，泥板上已經有 15 組畢氏三元數之計算。

我們熟知的畢氏三元數有：（3、4、5）、（5、12、13）、（7、24、25）、（8、15、17）等，其中是否有公式存在可以找出所有的畢氏三元數？畢氏學派除了證明畢氏定理之外，也證明了存在無限多組畢氏三元數。他們提出畢氏三元數的一組公式：a＝2n＋1，b＝$2\mathbf{n}^2+2\mathbf{n}$，c＝$2n^2+2n+1$

我們已經知道「奇數和可以表示成一個正方形數」， 如：1＋3＋5＋7＝4^2，1＋3＋5＋7＋9＝5^2。觀察一下 ，發現：4^2＋9＝5^2即4^2+3^2＝5^2 ，故 3、4、5 是一組畢氏三元數。

又如：1＋3＋5＋7＋9＋⋯＋23＝12^2，1＋3＋5＋7＋9＋⋯＋23＋25＝13^2，於是有12^2＋25＝13^2，即12^2＋5^2＝13^2，故 5、12、13 也是一組畢氏三元數。

觀察正方形數，我們知道n^2個小石子組成的正方形再加上 2n＋1 個小石子就會構成一個更大的正方形——（n＋1）^{2}個小石子所組成的正方形，也就是說 $n^2+(2n+1)=(n+1)^2$。



如果 2n＋1 也是一個正方形數，即存在正整數 m 使得 2n＋1＝m^2，則 n＝$\frac{m^2-1}{2}$，n＋1＝$\frac{m^2+1}{2}$。因此，

$n^2+m^2=\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2+m^2=\frac{m^4-2m^2+1}{4}+m^2=\frac{m^4+2m^2+1}{4}$

$=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2=(n+1)^2$

因此 m、n、n＋1 也就是 m、$\frac{(m^2+1)^2}{2}$ 、$\frac{(m^2-1)^2}{2}$便構成了一組畢氏三元數。

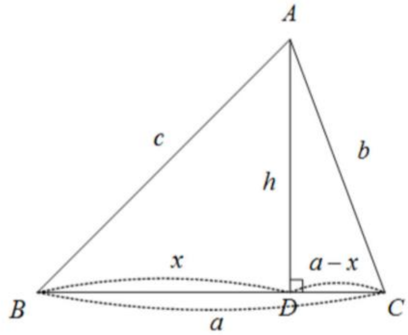
令 m＝3、5、7、9⋯，我們就可以一次得到 3、4、5；5、12、13；7、24、25 ；9、40、41⋯等無限多組畢氏三元數。這些畢氏三元數有一些特徵：斜邊與擲筊的其中一邊相差 1，如果 m 表為 2k＋1，則上述的畢氏三元數也可以表為 2k＋1、$2k^2+2k$、$2k^2+2k$＋1。

柏拉圖給了另一組公式：a＝2n、b＝n^2-1、c＝n^2+1，此時斜邊與其中一股之差為 2 。但他們都不是方程式$a^2+b^2=c^2$的所有解，一般解的公式是 a＝2mn、 b＝m^2-n^2、c＝m^2+n^2，其中 m、n（m＞n）為兩互質任意正整數。此公式的解法由丟番圖（Diophantus）約公元前 250 年首先提出。

五、畢氏定理證明海龍公式

海龍公式：設ΔABC 的三邊長分別為 a、b、c，且令 s ＝ $\frac{a+b+c}{2}$，則ΔABC＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

證明：（請看右圖）



（想法：先抓到高 h，而 h 的關鍵在於 x）

先如圖畫底邊 a 上的高 h，然後可得兩線段 BD＝x，線段 DC＝a－x。

觀察兩個三角形ΔABD、ΔACD，並利用畢氏定理得：h＝$c^2-x^2=b^2-(a-x)^2$，可解得 x= $\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$，然後代入ΔABC＝$\frac{ah}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{c^2-x^2}$

計算過程：

$$\Delta ABC=\frac{a}{2}\sqrt{c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)}=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2ac)^2-\left(c^2+a^2-b^2\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left(2ac+a^2+c^2-b^2\right)\left(2ac-a^2-c^2+b^2\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left[(a+c)^2-b^2\right]\left[b^2-(a-c)^2\right]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

參、結論

畢氏定理這個公式十分有趣，它有 400 多種證明方法，難易程度其實有些許的落差，但要說困難不好理解其實也還好。在蒐集資料、查閱書籍時，我發現有的證明方法簡略易懂，有的卻是複雜艱深，較難以理解。這個公式在建築上或是數學方面都有很大的幫助，當時埃及人懂得使用畢氏定理尋找出畢氏三元數的關係來找到直角，這造就了他們在建築上一個很

大的成就。最常用的 3、4、5 等許多的比例關係在直角三角形的邊長計算上也有莫大的幫助。結尾的部分我使用畢氏定理來解釋海龍公式，我覺得這一部分就較為複雜了，必須要有一些想法，才能順利地證明出來。通常運用「餘弦定理」來證明海龍公式應該是最多人知道的證法，但少有人會想到要使用畢氏定理來證明。

肆、引註資料

- 維基百科網站。https://zh.wikipedia.org/wiki/%
- 洪萬生個人網站。https://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/
- 國立交通大學，微積分教學小組。http://calculus.nctu.edu.tw/upload/calculus_L
- 洪明賢。**畢氏定理探源**。https://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol4no10c.htm?
- 林炎全、洪萬生、黃俊瑋、蘇俊鴻 合譯。**畢氏定理四千年**