投稿類別:數學類

篇名:
換與不換的兩難—蒙提霍爾問題延伸探討

作者:
陳人豪　。嘉義縣立永慶高級中學。高二忠班。

指導老師:
黃國書老師

壹●前言

一、研究動機:

在數學社課時，意外遇到了一題型特殊的機率題，「某綜藝節目有以下一個單元:有三個門，其中一扇門後有著百萬名車，而其他兩扇門後皆是一頭山羊。如能猜中百萬名車在哪扇門後，則車子就是你的。今假設你選了一扇門後，節目主持人將剩餘兩扇門中其中一扇有著山羊的門打開，給你一個換門的機會。則換門好，還是不換好?」我對此題目非常有興趣，想探討其中的奧秘，於是開始著手研究。

二、研究目的:

(一)試著用數學角度解釋換與不換之間的差異，且哪個較好。
(二)求出換門中獎的確切機率與不換門中獎的確切機率。
(三)將問題複雜化，並且用數學角度求出各種情況下的中獎機率，且找出將之公式化。

三、研究方法:

(一)本研究是利用機率學的基礎，將各種狀況以樹狀圖的方式一一畫出，進而找到問題的答案。
(二)透過一些數學在機率上的運算，再推導出各種不同狀況下機率的一般化公式。

貳●正文

一、最初的問題

前言的問題，很明顯地是要作答者求出換門與不換門中獎的機率，進而比較雙方機率的大小，以做出決定。
首先，不難想到這個問題有一個最直觀、最直接的想法，也就是從一開始做出的選擇的機率去思考換與不換間的利益。
很明顯地，我們可以知道一開始就選中汽車的機率是 1/3，而沒有選中汽車的機率是 2/3。從這個結論來反思整個問題，當主持人打開其中一扇有羊的門後，只剩一扇有車和一扇有羊的門。而因爲一開始就選中汽車的機率僅僅只有 1/3，而沒選中的機率卻有 2/3，所以當然要換門。
而這個方法只是一種叫簡便的判斷方式，接下來我們進一步來看看更嚴謹的

推論方式。

討論如何解析其機率，我們使用機率的基礎---樹狀圖。

如圖一，不難發現狀況有兩種。

第一種:原本就選中車子，換門會中羊，而不換門中車子。

第二種:原本選中羊，換門會中車子，而不換門會中羊。

由此可知，換的狀況有三種，有兩種情況可以中車，故換門會中獎的機率是 2/3。

而不換的情形有三種，有一種會中獎，故不換門中獎的機率是 1/3。

由此可知，換門的中獎機率較大。

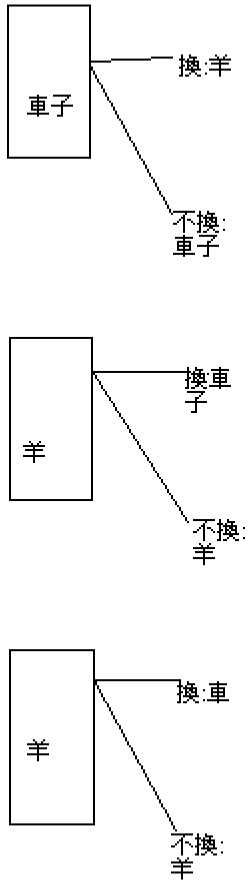
由此，我們可以列一個算式:

因選到的第一扇門的機率爲 1/3，而換門中獎的機率是零。

選到第二扇門的機率也是 1/3，而換門中獎的機率是 1。

選到第三扇門的機率也是 1/3，而換門中獎的機率是 1。

故換門會中獎的機率是



(圖一)

$\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}\times(0+1+1)=2/3$

而不換門中獎的機率顯而易見就是

$\frac{1}{3}\times(1+0+0)=1/3$ (也就是一開始就選到車子的機率)

二、四個門

接下來，將原題目的門數改爲四個。

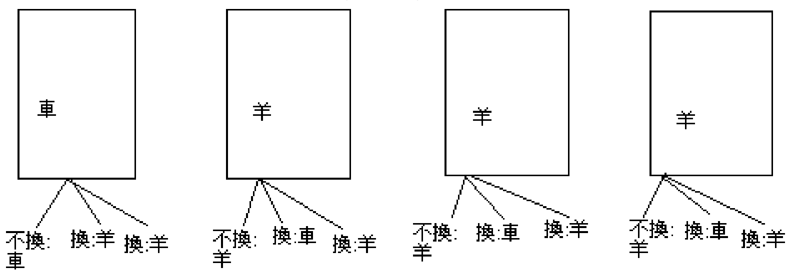
利用與三個門的時候同樣的方法，繪出樹狀圖觀察其機率的狀況。

可由以下圖二發現，每個門被選中的機率都變爲 1/4，而第一扇門換後終獎的機率爲零。第二扇門換後中獎的機率爲 1/2(一個羊，一個車)，而第三、四扇門也都與第二扇門有著相同的狀況。

可統整出:

選第一扇門且換門中獎的機率爲$\frac{1}{4}\times 0$(亦爲選中此門機率乘上換門中獎的機率)

(圖二)



第二扇門且換門中獎的機率爲$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$(亦爲選中此門機率乘上換門中獎的機率)

第三、四扇門與第二扇門相同。

故若此遊戲有四個門，則換門會中獎的機率爲

$\frac{1}{4}\times(0+3\times\frac{1}{2})$=3/8 (意即將上列機率加起來)

而不換門中獎的機率爲 1/4 (也就是一開始就選到車子的機率)

三、五個門以上(N 個門)

將題目擴充至五個門(N 個門)以上，探討其機率。

由之前推出的三個門、四個門的機率可得知其實換門後中獎的機率就是

$\frac{1}{N}[0+(N-1)\times\frac{1}{N-2}]$

以下說明其原因:

因爲選中每個門的機率一定都是 1/N，而第一個門本身是藏車子，所以換門後就不可能是車子，故換門後中獎的機率是 0(所以中括號內有個 0)。

而其他的門本身藏的是羊，又因主持人會將其中一個沒有車子的門打開，所以要換門只剩 N-2 扇門可選，且 N-2 扇門中藏車子的只有一扇門，故換門後中獎的機率是 1/(N-2)。

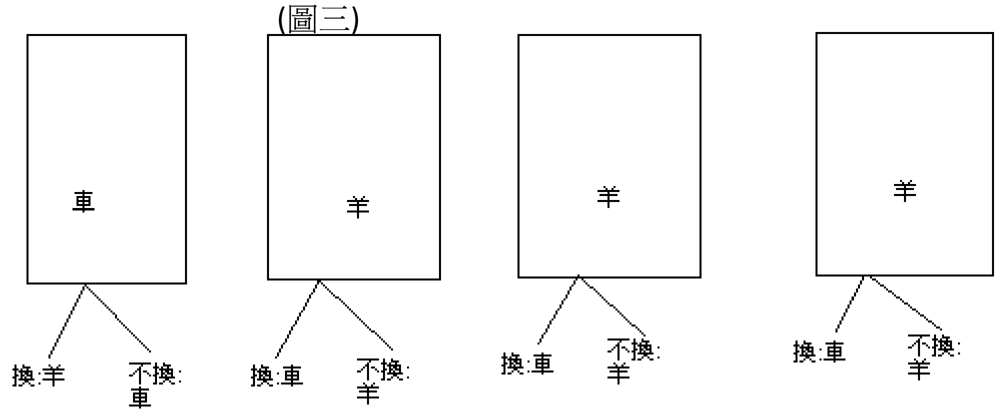
而總共有 N-1 扇原本是藏著羊的門，將這 N-1 扇門換門後中獎的機率加起來可得到(N-1)×$\frac{1}{N-2}$。(也就是中括號內下一項)

不換門中獎的機率顯而易見便是 1/N

四、四門關兩門

先前提到的狀況，全都是選了一扇門後，主持人再打開其中「一扇」沒有車子的門。而我不禁想，或許可以再將題目變得更爲複雜，於是變來探討四門開兩門(原先有四個門，選完門後，主持人打開兩個藏著羊的門)的狀況。

(圖三)



如圖三，就是四門開兩門的樹狀圖，因爲選了門後，主持人開了兩門，所以換門只剩一扇門可以換(如同三門開一門的情況)，故可得知換門中獎機率爲

$$\frac{1}{4} \times (0+1+1+1) = \frac{3}{4}$$

因爲選到每扇門的機率爲 1/4，而只有換掉車子門不會中獎，其他門換門的話，中獎機率都是 1(小括號內是 0+1+1+1)。
而不換門中獎的機率就顯而易見是 1/4，也就是一開始就選中車的機率。

五、五門開三門

接下來探討五門開兩門的情況，其實推出四門開兩門的情況後，就很好解出五門開兩門的機率了。
因爲若一開始選到車子門然後換門，中獎的機率必爲零。而一開始若選到其他四個門中其中一個，換門的選擇會有兩個門(因爲扣掉被選的門和主持人打開的兩個)，而兩個中只有一個是有車子的，故機率爲 1/2。所以不難導出其機率即爲

$$\frac{1}{5} \times \left(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}$$

而不換門的機率跟之前一樣，就是一開始就選到車子的機率=1/5。

六、六門開二門

接下來再進一步將題目變得更複雜，來探討六門開三門的情況。其實與上述狀況大同小異。
因爲如果一開始選到車子的門卻換門，則中獎的機率爲零。而另一方面，若一開始選到沒有車子的其他五扇門，換門的選擇有三個。(扣掉被選的門，和主持人打開的二個)，而其中只有一扇門有車子，故中獎機率爲三分之一。因而可推出其換門中獎機率爲

$$\frac{1}{6} \times (0+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}) = \frac{5}{18}$$

不換門中獎機率爲=1/6。

七、N 門開 M 門

由以上兩個情況，其實就可以推出 N 門開 M 門的機率一般化公式。
今有 N 門，而主持人會打開 M 門(N-M≥ 2 , N、M∈ 自然數)，則其中必有一門是原本就有車子的，所以換門的話中獎機率是零。而若一開始選中其他 N-1 門中的其中一門，換門的選擇則有 N-M-1 個選擇(因扣掉選擇那一個門

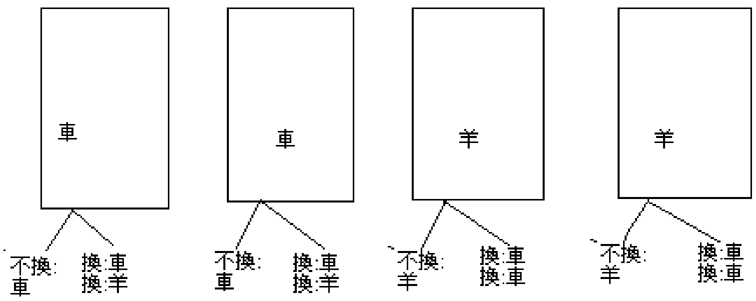
和主持人打開的 M 個門)。而這 N-M-1 個門中只有 1 個門有車子，故換門後中獎的機率是 1/(N-M-1)，所以即可推得換門機率爲

$$\frac{1}{N}\times\left[0+(N-1)\times\frac{1}{(N-M-1)}\right]=\frac{1}{N}\times\frac{(N-1)}{(N-M-1)}$$

而不換門中獎的機率依舊仍爲 1/N。

八、四門兩車開一門

上述情況都僅僅討論只有一扇門後有車子的情況，於是嘗試討論車子有兩台以上的狀況，先從最簡單的四門兩車開一門的情況下手。



(圖四)

由圖四可發現，每扇門換門的方式皆有兩種。而若選車子門，換門中獎的機率爲 1/2。反之，若一開始選擇羊門，換門中獎的機率爲 1(剩餘兩門都是車子)，故可得知其機率爲$\frac{1}{4}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+1)$=$\frac{3}{4}$。

而不換門中獎機率爲 1/2(即一開始就選到車子門的機率)

九、五門兩車開兩門

接下來探討五門兩車開兩門的狀況。

選車子門，則換門的選擇有兩門(刪除被選中的門和被主持人打開的兩扇門)，而其中一扇門會有車子，所以機率爲二分之一(此種情形會有兩個，因爲有兩個車子門)。而剩餘的三個門，一樣有兩個換門的選擇，而這兩個門都有車子(因爲主持人打開另外兩個羊門，只剩車門了)，故中獎機率是 1。所以可推得此種狀況換門中獎機率爲

$$\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+1+1\right)=\frac{4}{5}$$

不換門中獎機率爲$\frac{2}{5}$(即一開始就選中車門的機率)。

十、六門三車開兩門

接下來再討論更複雜的狀況。

試推六門三車開兩門。若選到車子門，換門的選擇有三種(六門扣除被選中的門和主持人打開的兩門)。這三門內共有兩個門藏車子(因本身以選中車子，所以只剩下兩輛)，所以換門中獎機率是 2/3。若一開始選到其餘三門羊門，和門選擇一樣有三種，跟車門是同一種情況，但這三門中每一門都有車，故換門中獎機率是 1。 由此可知其換門中獎機率爲

$$\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{1}+1+1\right)=\frac{5}{6}$$

不換門中獎機率爲 1/2(即一開始就選到車子的機率)

十一、N 門 A 車開 M 門

最後做一個總結的歸納，試著推導出 N 門 A 車開 M 門的換門機率公式。首先必須先設定條件(N-A-1≥ M，N,M,A 皆爲自然數)，若選中車門，換門的選擇共有 N-M-1 個(全部扣除被選中與主持人打開的門)，而這些門當中有 A-1 個門中有車(因爲全部車門的數量扣除已被選中的車門)，故這換門中獎機率爲(A-1)/(N-M-1)，而此種情形有 A 個。

再來討論一開始挑選中羊門的情況，選中羊門一樣有 N-M-1 個換門選擇，而這其中有 A 個門有車，故換門中獎機率爲 A/(N-M-1)。而這樣的情形有 N-A 種。故可推得其換門中獎機率爲

$$\frac{1}{N}\times\left[\frac{A-1}{N-M-1}\times A+\frac{A}{N-M-1}\times(N-A)\right]=\frac{1}{N}\left(\frac{A(N-1)}{N-M-1}\right)$$

而不換門中獎機率即一開始便選中車的機率，其爲$\frac{A}{N}$

再將$\frac{1}{N}\left(\frac{A(N-1)}{N-M-1}\right)$減去$\frac{A}{N}$會得$\frac{1}{N}\left(\frac{A(N-1)}{N-M-1}-\frac{A(N-M-1)}{N-M-1}\right)=\frac{1}{N}\left(\frac{AM}{N-M-1}\right)$

又可由條件 N-A-1≥ M，得 N-M-1 大於等於 A，所以$\frac{1}{N}\left(\frac{AM}{N-M-1}\right)$恆正。則換門中獎機率恆大於不換門中獎機率。

參●結論

1. 在任何情況下，換門中獎的機率一定比不換門來得大。

2. 在 N 門 A 車開 M 門的情況中，換門中獎機率爲$\frac{1}{N}\left(\frac{A(N-1)}{N-M-1}\right)$，而不換門中獎機率爲$\frac{A}{N}$。

肆●引註資料

一、 參考網址:

(一)zh.wikipedia.org/wiki/蒙提霍爾問題

二、 參考書籍:

(一)蔡聰明(1998)。轎車與山羊。科學月刊，19(11)

(二)呂振森(譯) (2011)。Ronald E. Walpole、Raymond H. Myers、Sharon L. Myers、Keying Ye 著。機率與統計：機率篇。東華。