投稿類別：數學類

篇名：

“尋”不循環

作者：

林郁娟。國立蘭陽女中。高二 13 班
郭鳳英。國立蘭陽女中。高二 13 班
李培瑜。國立蘭陽女中。高二 13 班

指導老師：

陳敏晧　老師

壹●前言：

一、研究動機:：

從國中開始，我們使用分數作答多於小數，這是由於有些小數具無限循環的問題，而我們決定探討循環小數的背後的關係。

二、研究目的：

我們以 1 當被除數(即分子)，使用數列中的遞迴關係式表示當最簡分數化成小數時，小數點後的有限數字或無限循環數字形成的數列，設法歸納出其中的規則，試著找出循環的規律。

三、研究過程：

$\boxed{\text{研究動機}}\rightarrow\boxed{\text{研究目的}}\rightarrow\boxed{\text{研究方法}}\rightarrow\boxed{\text{觀察循環關係}}\rightarrow\boxed{\text{討論分析}}\rightarrow\boxed{\text{結論}}$

四、研究方法：

鎖定埃及分數(所謂的埃及分數是指分子爲 1 的分數)，利用遞迴關係式來表示其循環個數，接著以 $\frac{1}{1}\sim\frac{1}{100}$ 的循環關係來討論。

貳●正文：

一、循迴遞迴關係式：

首先，我們將小數點後第一位訂爲 a_1 ，第二位訂爲 a_2 ，以此類推，然後開始探討小數點後一位的循環關係。

(一) 類型 1: 分數可以整除的情況

例如:

$\frac{1}{1}=1.\bar{0}$ (無限個 0)

$\frac{1}{2}=0.5\bar{0}$ (無限個 0)

從小數點後開始當作一列新數列，第一項 0 當做 a_1 ，第二項 0 爲 a_2……，由此類推，由於這數列的每一項都等於其前一項，因此此類型的遞爲關係式就爲 $a_n = a_{n-1}$(後項都等於其前項)。

(二) 類型 2 :從第二項開始循環，所以表示爲 $a_n = a_{n-1}$, $n≧3$

例如:

$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$ (無限個 6)

由於此類型的數列，不是從首相就開始循環，所以 $\frac{1}{6}$ 的遞迴關係爲

$a_n = a_{n-1}$, $n≧3$

(三) 類型 3:其循環個數不只爲一位

例如:

$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ (無限個 142857)

$\frac{1}{11} = 0.\overline{09}$ (無限個 09)

由於此類型的數列，其循環個數不只爲一位，所以 $\frac{1}{11}$ 的遞迴關係式爲

$a_n = a_{n-2}$, $n≧3$

二、列表 $\frac{1}{1} \sim \frac{1}{60}$ 的遞迴關係式

※由於使用之電腦計算機最多只能計算到小數點後第 34 位，因此對於循環過大不利於觀察之小數暫不討論，而其小數狀況則以 F 作爲代表。

$\frac{1}{1}$	$1.\overline{0}$ $a_n = a_{n-1}, n \ge 2$	$\frac{1}{31}$	$a_n = a_{n-15}, n \ge 16$
$\frac{1}{2}$	$0.5\overline{0}$ $a_n = a_{n-1}, n \ge 3$	$\frac{1}{32}$	$0.03125\overline{0}$ $a_n = a_{n-1}, n \ge 7$

$\frac{1}{3}$	$0.\overline{3}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 2$	$\frac{1}{33}$	$0.0\overline{30}$ $a_n = a_{n-2}, n \geq 3$
$\frac{1}{4}$	$0.25\overline{0}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 2$	$\frac{1}{34}$	$a_n = a_{n-16}, n \geq 18$
$\frac{1}{5}$	$0.\overline{2}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 3$	$\frac{1}{35}$	$0.02857\overline{142857}$ $a_n = a_{n-6}, n \geq 8$
$\frac{1}{6}$	$0.1\overline{6}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 3$	$\frac{1}{36}$	$0.02\overline{7}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 4$
$\frac{1}{7}$	$0.\overline{142857}$ $a_n = a_{n-6}, n \geq 7$	$\frac{1}{37}$	$0.\overline{027}$ $a_n = a_{n-3}, n \geq 4$
$\frac{1}{8}$	$0.125\overline{0}$ $a_n = a_{n-4}, n \geq 5$	$\frac{1}{38}$	$a_n = a_{n-18}, n \geq 20$
$\frac{1}{9}$	$0.\overline{11}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 2$	$\frac{1}{39}$	$0.\overline{025641}$ $a_n = a_{n-6}, n \geq 7$
$\frac{1}{10}$	$0.1\overline{0}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 3$	$\frac{1}{40}$	$0.025\overline{0}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 5$
$\frac{1}{11}$	$0.\overline{09}$ $a_n = a_{n-2}, n \geq 3$	$\frac{1}{41}$	$0.\overline{02439}$ $a_n = a_{n-5}, n \geq 6$
$\frac{1}{12}$	$0.08\overline{3}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 4$	$\frac{1}{42}$	$0.02\overline{380952}$ $a_n = a_{n-6}, n \geq 8$
$\frac{1}{13}$	$0.\overline{076923}$ $a_n = a_{n-6}, n \geq 7$	$\frac{1}{43}$	$a_n = a_{n-21}, n \geq 22$
$\frac{1}{14}$	$0.07\overline{142857}$ $a_n = a_{n-6}, n \geq 8$	$\frac{1}{44}$	$0.02\overline{27}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 5$

$\frac{1}{15}$	$0.0\overline{6}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 3$	$\frac{1}{45}$	$0.0\overline{2}$ $a_n = a_{n-2}, n \geq 3$
$\frac{1}{16}$	$0.0625\overline{0}$ $a_n = a_{n-1}\quad, n \geq 6$	$\frac{1}{46}$	$a_n = a_{n-2}, n \geq 24$
$\frac{1}{17}$	$a_n = a_{n-16}, n \geq 17$	$\frac{1}{47}$	F
$\frac{1}{18}$	$0.0\overline{5}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 3$	$\frac{1}{48}$	$0.0208\overline{3}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 6$
$\frac{1}{19}$	$a_n = a_{n-18}, n \geq 19$	$\frac{1}{49}$	F
$\frac{1}{20}$	$0.05\overline{0}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 4$	$\frac{1}{50}$	$0.02\overline{0}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 4$
$\frac{1}{21}$	$0.\overline{047619}$ $a_n = a_{n-6}, n \geq 7$	$\frac{1}{51}$	$a_n = a_{n-16}, n \geq 17$
$\frac{1}{22}$	$0.0\overline{45}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 4$	$\frac{1}{52}$	$0.01\overline{923076}$ $a_n = a_{n-6}, n \geq 9$
$\frac{1}{23}$	$a_n = a_{n-22}, n \geq 23$	$\frac{1}{53}$	$a_n = a_{n-13}, n \geq 14$
$\frac{1}{24}$	$0.041\overline{6}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 15$	$\frac{1}{54}$	$0.0\overline{185}$ $a_n = a_{n-3}, n \geq 5$
$\frac{1}{25}$	$0.04\overline{0}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 4^{\cdots}$	$\frac{1}{55}$	$0.0\overline{18}$ $a_n = a_{n-2}, n \geq 4$
$\frac{1}{26}$	$0.0\overline{384615}$ $a_n = a_{n-6}, n \geq 8$	$\frac{1}{56}$	$0.017\overline{857142}$ $a_n = a_{n-6}, n \geq 10$
$\frac{1}{27}$	$0.\overline{037}$ $a_n = a_{n-3}, n \geq 4$	$\frac{1}{57}$	$a_n = a_{n-1}, n \geq 9$

$\frac{1}{28}$	$0.0357\overline{142857}$ $a_n = a_{n-6}, n \geq 10$	$\frac{1}{58}$	$a_n = a_{n-28}, n \geq 30$
$\frac{1}{29}$	$a_n = a_{n-28}, n \geq 29$	$\frac{1}{59}$	F
$\frac{1}{30}$	$0.0\overline{3}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 3$	$\frac{1}{60}$	$0.01\overline{6}$ $a_n = a_{n-1}, n \geq 4$

三、觀察與發現:

我們整理出表格以後發現，7、11、13、17、19、21、……等數有其特殊循環規則。

例如：

$\frac{1}{7}$　$a_n = a_{n-6}$

$\frac{1}{14}$　$a_n = a_{n-6}$

$\frac{1}{21}$　$a_n = a_{n-6}$

$\frac{1}{28}$　$a_n = a_{n-6}$

→當 1 除以 7 的倍數(整數倍)時，小數點後的循環數列皆以 6 個數爲一循環，我們將它表示爲 7(6)。以 1 除以 11 的倍數時則以 2 個數一循環，表示爲 11(2)。

13(6)、17(16)、19(18)……亦有其固定的循環個數。

$\frac{1}{11}$、$\frac{1}{22}$、$\frac{1}{33}$、$\frac{1}{44}$、$\frac{1}{55}$、$\frac{1}{66}$、$\frac{1}{88}$、$\frac{1}{99}$皆爲兩個一循環($a_n = a_{n-2}$)

但是，當 1 除以 77 時我們得到了一個意外的結果：

$\frac{1}{77}$的遞迴關係爲$a_n = a_{n-6}$，爲六個一循環。

因此，我們猜測：必與 77 的因數有關

77 的質因數有 2、7、11。$\frac{1}{2}$ 爲 1 個一循環，$\frac{1}{7}$ 爲 6 個一循環，而 $\frac{1}{11}$爲 2 個一循環，所以$\frac{1}{77}$是和$\frac{1}{7}$的循環個數一樣，而不是和$\frac{1}{11}$、$\frac{1}{2}$一樣。

這是因爲質數 2 (1)

質數 7 (6)

質數 11(2)

$\left.\begin{array}{l}\text{質數 } 2\,(1)\\ \text{質數 } 7\,(6)\\ \text{質數 } 11(2)\end{array}\right\}$ $\because [1,6,2]=6$，$\therefore \frac{1}{77}$ 爲 6 個一循環

1/91	質因數有	7(6)、13(6)	爲 6 個一循環
1/143	質因數有	11(2)、13(6)	爲 6 個一循環
1/187	質因數有	11(2)、17(16)	爲 16 個一循環
1/209	質因數有	11(2)、19(18)	爲 18 個一循環
1/217	質因數有	7(6)、31(15)	爲 30 個一循環
1/253	質因數有	11(2)、23(22)	爲 22 個一循環
1/319	質因數有	11(2)、29(28)	爲 28 個一循環

以上都符合以最小公倍數爲循環，故：當一質數有兩個以上的質因數，取其循環的最小公倍數，就是其循環的個數。

四、其他例外的循環

例如：

$\frac{1}{49}(\frac{1}{7^2}) = 0.02040816\,3265306122\,\ldots\ldots$，卻不是爲2個一循環

$\frac{1}{121}(\frac{1}{11^2}) = 0.00826446\,28099173\ldots\ldots\ldots$，卻不是爲2個一循環

$\frac{1}{169}(\frac{1}{13^2}) = 0.00591715\,97633136\,\ldots\ldots\ldots$，卻不是爲6個一循環

因此我們先以 $\frac{1}{49}$ 來討論，9 雖然是 7 的倍數，但卻不是 6 個數一循環。

五、$\frac{1}{49}$以無限循環等比級數來表示

我們仔細觀察$\frac{1}{49}=0.0204081632\ldots$這個數以後發現它是由
$0.02+0.0004+0.000008+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{10^{2n}}$太神奇了!!!
寫成直式：

$$
\begin{array}{lll}
n=1 & , & \frac{2^1}{10^2}=0.02 \\
n=2 & , & \frac{2^2}{10^4}=0.0004 \\
n=3 & , & \frac{2^3}{10^6}=0.000008 \\
n=4 & , & \frac{2^4}{10^8}=0.00000016 \\
n=5 & , & \frac{2^5}{10^{10}}=0.0000000032 \\
+) & & \ldots \\
\hline
 & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{10^{2n}} &
\end{array}
$$

因此我們想將其他沒有特定循環規則的數表示為$\sum$的形式

反證：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{10^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{50})^n=\frac{\frac{1}{50}}{1-\frac{1}{50}}=\frac{\frac{1}{50}}{\frac{49}{50}}=\frac{1}{49}$

六、$\frac{1}{98}$也以無限等比級數來表示

我們又將$\frac{1}{49}\times\frac{1}{2}$以後，也是一個不循環的小數

$\therefore\frac{1}{98}=0.0102040816326530612244897959 1\ldots$

並且發現如果用$\sum$來表示的話可以寫成

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{10^{(n-1)+2}}$, 比$\frac{1}{49}$多乘上$\frac{1}{10^2}$倍

七、$\frac{1}{P}$，當$P\in$質數，則$\frac{1}{P}$其循環的特殊規律

	$\frac{1}{P}$	循環小數	循環個數
1.	1/3	$0.\overline{3}$	1
2	1/7	$0.\overline{142857}$	6
3	1/11	$0.\overline{09}$	2
4	1/13	$0.\overline{076923}$	6
5	1/17	$0.\overline{0588235294\ 117647}$	16
6	1/19	$0.\overline{5631578947\ 368421}$	18
7	1/23	$0.\overline{0434782608\ 6956521739\ 13}$	22
8	1/29	$0.\overline{0344827586\ 2068965517\ 24137931}$	28
9	1/31	$0.\overline{0322580645\ 16129}$	15
10	1/37	$0.\overline{027}$	13

若 P 是質數，且 1/P 是循環小數，我們很快發現有些循環節長度是偶數的循環小數，例如 1/7、1/11、1/13、1/17、1/19、1/23 等等，又有一個的特別的規律出現了。

例如:

1/29 的循環節是 0344827586206896551724137931，其長度爲偶數，將它從中間項分成爲兩段數列，03448275862068 和 96551724137931 兩段。

將兩段相加 03448275862068+96551724137931＝99999999999999

發現上述兩段數字和的每一位數都是 9。

故:如果將 $\frac{1}{P}, P \in$ 質數，且循環個數爲偶數的循環節中分成兩段，並將兩段數相加，其和的各數字都爲 9。

参●結論：

大致上可分爲幾類：令 P 爲正整數

一、第一類：$\frac{1}{P}$最後以 0 不斷循環下去，令其符號爲©。

二、第二類：$\frac{1}{P}$的數個因數中，其循環爲其數個質數中的循環數中最小公倍數，爲$\frac{1}{P}$的循環個數，其循環節個數以(N)爲代表。

三、第三類：$\frac{1}{P}$的循環個數爲(P-1)，稱爲輪迴數，P=7、17、19、23、29、47、59、61、97 令其符號爲Δ(P-1)。

第四類：$\frac{1}{P}$的循環數列，須以 $\sum$ 來表示 P=49、98，令其符號爲$\sum$ 。

註:其實第二類和第三類是一樣的歸類法，只是第三類的循環個數剛好是($p-1$)個循環。

四、以 P=1~P=100 的埃及小數$\frac{1}{p}$，其循環分類情況，以表格的方式一一列出

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
©	©	(1)	©	©	(1)	Δ (6)	©	(1)	©
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(2)	(1)	(6)	(6)	(1)	©	Δ (16)	(1)	Δ (18)	©
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
(6)	(2)	Δ (22)	(1)	©	(6)	(3)	(6)	Δ (28)	(1)
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
(15)	(1)	(2)	(16)	(6)	(1)	(3)	(18)	(6)	©
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
(5)	(6)	(21)	(2)	(1)	(2)	Δ (46)	(1)	Σ	©
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
(16)	(3)	(13)	(3)	(2)	(6)	(18)	(28)	Δ (58)	(1)
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Δ (60)	(15)	(6)	©	(6)	(2)	(33)	(16)	(22)	(6)
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
(35)	(1)	(8)	(3)	(1)	(18)	(6)	(6)	(11)	©
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
(9)	(5)	(41)	(6)	(16)	(21)	(28)	(2)	(44)	(1)
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
(6)	(15)	(15)	(46)	(18)	(1)	Δ (96)	Σ	(2)	©

六、所以當我們已知道這些埃及分數，是以某些特定的規律循環，因此我們不需要再以計算機來計算，舉例來說，$\frac{1}{94}$，$94=2\times47$，47 爲輪迴數，所以 $\frac{1}{47}$ 其循環(46)，因此我們可以推斷 $\frac{1}{94}$ 爲 46 個一循環。

七、以歸類出來的這些方法，可以繼續推廣下去，使 P 更大，然後以 P 的質數因數，直接推出其循環的個數。

八、未來展望：不僅僅找出分子爲 1 的埃及小數的循環規律，更進一步研究分子大於 1 的分數循環規律。

肆●引註資料：

1.蔡聰明(2003)。數學拾貝。台北市：三民。

2.康明昌(2001)。數學傳播。25(3)　。55-62。

3.維基百科。2012 年 3 月。取自
http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BE%AA%E7%8E%AF%E5%B0%8F%E6%95%B0