投稿類別：數學類

篇名：
圓內過任意點之等弦，其線段分為 a：b 問題研究

作者：
楊文瑄。國立蘭陽女中。高二 13 班
楊婷穎。國立蘭陽女中。高二 13 班
藍宜佳。國立蘭陽女中。高二 13 班

指導老師：陳敏晧老師

壹●前言

一、摘要

「圓」在高中這個階段是頗為重要的課程，而關於圓的研究，古希臘人認為它是最完美的圖形，早在極久遠時便有非常深入的探討。我們在練習題目時，偶然在徐氏數學當中發現一個關於割線比例的題目，因此便想探討關於一個圓中，兩條等長，並可以互相分割為固定比例的弦的問題。

二、研究目的

(一) 推導單位圓中，過 $P(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$之兩條等長弦互相分為 1：m($m\in$自然數)的方程式公式

(二) 推導單位圓中，過動點 P 之兩條等長弦互相分為 1：m($m\in$自然數)的方程式公式

(三) 推導單位圓中，過動點 P 之兩條等長弦互相分為 a：b(a、$b\in$實數)的方程式公式

(四) 未來目標：尋找球體中過一動典之兩相等平面互相分為 a：b(a、$b\in$實數)的方程式公式

三、研究設備及器材

(一) 紙

(二) 筆

(三) GeoGebra 4 繪圖程式

貳●正文

一、研究過程

(一) 問題起源

已知$A(1,2)$為圓C：$x^2+y^2=37$內部一點，
則過A點將弦分為$1:2$之方程式為何？

Sol：

$$\begin{cases} d^2+n^2=5....(1) \\ d^2+(3n)^2=37...(2) \end{cases}$$

$\therefore$ 由 $(2)-(1)$ 得：

$8n^2=32 \therefore n^2=4$

代入(1)

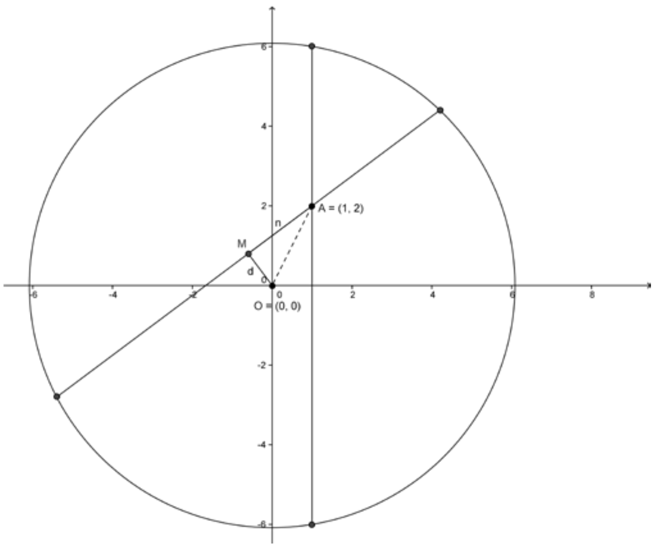
$\Rightarrow d=1$

令所求之弦為 $y-2=m(x-1)$ 或 $x=1$

由弦心距 $d=1 \Rightarrow \dfrac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\therefore m=\dfrac{3}{4}$ 代入

$\therefore$ 得方程式：$3x-4y+5=0$ or $x=1$



(二) 符號標示

為了方便說明，我們定相關名稱如下：

1. 圓 O 為 xy 平面上之單位圓，且其方程式為 $x^2+y^2=1$
2. L_1、L_2 為兩等弦
3. P 為 L_1、L_2 之交點
4. A、B 為 L_1 與圓周的兩交點
5. C、D 為 L_1 與圓周的兩交點
6. d 為 L_1 之弦心距
7. M 為弦 $\overline{AB}$ 之中點
8. 令 $\overline{MP}$=n

(三) 公式推導

1. 令P為定點

設圓O為位於xy座標中之單位圓

其方程式為$x^2+y^2=1$

$\therefore$ 得$\begin{cases} O(0,0) \\ r=\sqrt{1}=1 \end{cases}$

令$P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$為圓內一點

L_1、L_2為過P的兩條等長割線

且圓O和L_1交點為A、B

$d(O,L_1)=d$

M為$\overline{AB}$中點

連接$\overline{OM}$、$\overline{OP}$、$\overline{OA}$

$\because$O 為圓心

$\therefore$ $\overline{OM}$為$\overline{AC}$ 之中垂線

令 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\frac{1}{m}$

$\therefore$由畢氏定理可知：$\begin{cases} \overline{OM}^2+\overline{MP}^2=\overline{OP}^2 \\ \overline{OM}^2+\overline{MA}^2=\overline{OA}^2 \end{cases}$

$\therefore\begin{cases} d^2+n^2=\overline{OP}^2 \\ d^2+\left[\left(\frac{m+1}{m-1}\right)n\right]^2=r^2 \end{cases}$

2. 證明 $\overline{AM}$ 的比例關係

已知：M為$\overline{AB}$之中點，且$P \in \overline{AM}, \dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \dfrac{1}{m}, \overline{PM} = n$

求證 :$\overline{AM} = \left(\dfrac{m+1}{m-1}\right)n$

pf：

$\because \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{m+1} = \dfrac{\overline{AM} - n}{2\overline{AM}}$

$\therefore 2\overline{AM} = (m+1)(\overline{AM} - n)$

$\therefore 2\overline{AM} = (m+1)\overline{AM} - (m+1)n$

$\therefore (m+1)n = (m-1)\overline{AM}$

$\therefore \overline{AM} = \left(\dfrac{m+1}{m-1}\right)n \ldots (1)$

3. 代入公式(1)，驗證：

(1) $\overline{PA}:\overline{PB}=1：2$

$$\therefore \begin{cases} d^2 + n^2 = \overline{OP}^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \ldots (1) \\ d^2 + \left[\left(\dfrac{2+1}{2-1}\right)n\right]^2 = r^2 = 1^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow d^2 + 9n^2 = 1 \ldots (2)$

$\therefore$ 由(2)-(1)得：

$8n^2 = \dfrac{1}{2}$

$\therefore n^2 = \dfrac{1}{16} \therefore n = \dfrac{1}{4}$

$\therefore d = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

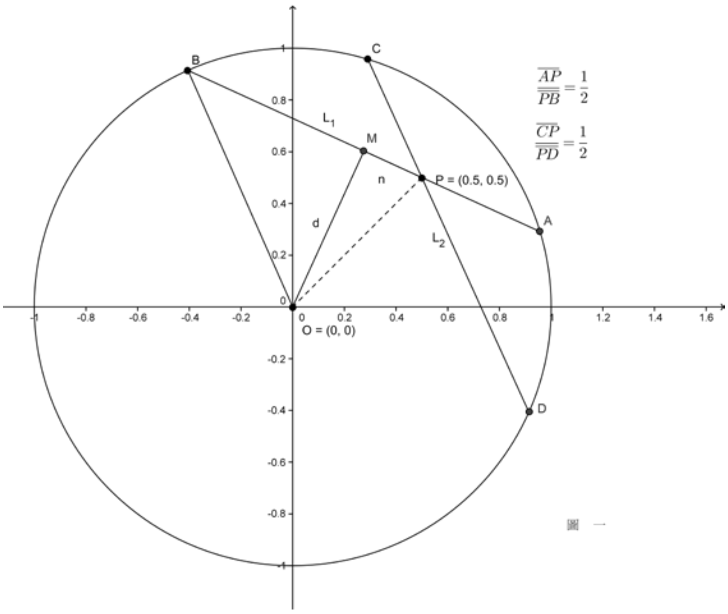


圖 一

(2) $\overline{PA}:\overline{PB}=1：3$

$$\therefore \begin{cases} d^2+n^2=\overline{OP}^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}\ldots(1) \\ d^2+\left[\left(\dfrac{3+1}{3-1}\right)n\right]^2=r^2=1^2 \end{cases}$$

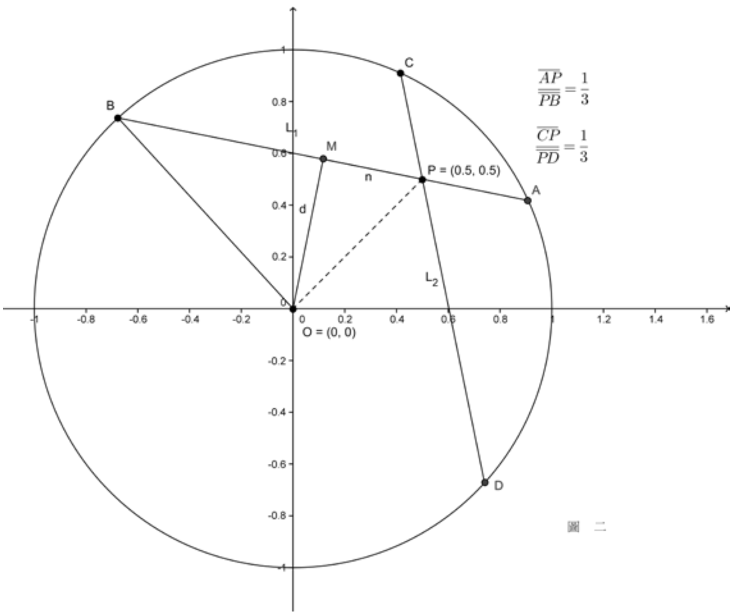
$$\Rightarrow d^2+4n^2=1\ldots(2)$$

$\therefore$由(2)-(1)得：

$$3\mathrm{n}^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore n^2=\frac{1}{6}\therefore n=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\therefore d=\frac{\sqrt{3}}{3}$$



圖二

(3) $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=1：4$

$$\therefore \begin{cases} d^2+n^2=\overline{OP}^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}\ldots(1) \\ d^2+\left[\left(\dfrac{4+1}{4-1}\right)n\right]^2=r^2=1^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d^2+\frac{25}{9}n^2=1\ldots(2)$$

$\therefore$由(2)-(1)得：

$$\frac{16}{9}\mathrm{n}^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore n^2=\frac{9}{32}\therefore n=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

$$\therefore d=\frac{\sqrt{14}}{8}$$

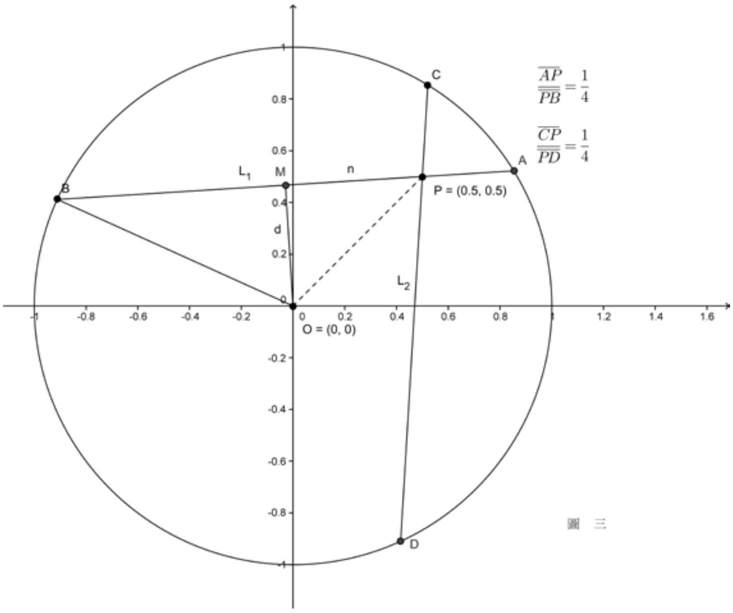


圖 三

(4) $\overline{PA}:\overline{PB}=1:5$

$$\therefore\begin{cases} d^2+n^2=\overline{OP}^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\ldots(1) \\ d^2+\left[\left(\frac{5+1}{5-1}\right)n\right]^2=r^2=1^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d^2+\frac{9}{4}n^2=1\ldots(2)$$

$\therefore$ 由(2)-(1)得：

$$\frac{5}{4}\mathrm{n}^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore n^2=\frac{2}{5}\therefore n=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\therefore d=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

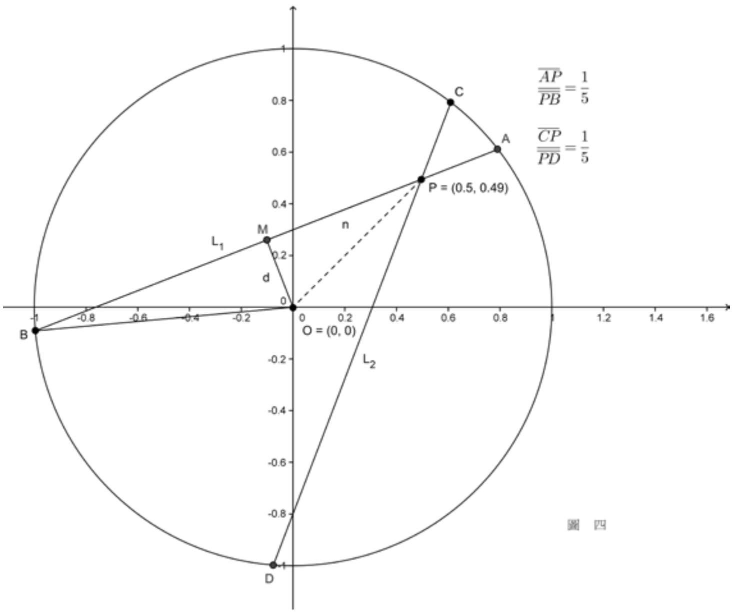


圖 四

(5) $\overline{PA}:\overline{PB}$=1：6

$$\therefore\begin{cases} d^2+n^2=\overline{OP}^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\ldots(1) \\ d^2+\left[\left(\frac{6+1}{6-1}\right)n\right]^2=r^2=1^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d^2+\frac{49}{25}^2=1\ldots(2)$$

∴由(2)-(1)得：

$$\frac{24}{25}n^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore n=\frac{25}{48}$$

$$\therefore n=\frac{5}{4\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{12}$$

$$\therefore d=-\frac{1}{48}(\text{不合})\ldots\text{無解}$$

4. 當 P 為動點

令P為動點(x,y)，且$0<x<1, 0<y<1$, P$\in$圓C

則$\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$

(1) 公式推導

A. $\overline{PA}:\overline{PB}$ **=1：m 型**

當將弦分為1: m型時

公式將變為$\begin{cases} d^2+n^2=x^2+y^2(=\overline{OP}^2) \\ d^2+\left(\frac{m+1}{m-1}n\right)^2=r^2 \end{cases}$

B. $\overline{PA}:\overline{PB}$ **=a：b 型**

當弦互相分為a：b型時

公式為$\begin{cases} d^2+n^2=x^2+y^2(=\overline{OP}^2) \\ d^2+\left(\dfrac{a}{a+b}\overline{AB}+n\right)^2=r^2 \end{cases}$

註 1：以 a、b、n 代換線段 AB 之過程

$$\because \frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AB}-n}{\overline{AB}}$$

$$\therefore a\overline{AB}=\frac{1}{2}b\overline{AB}-bn$$

$$\therefore bn=\left(\frac{1}{2}b-a\right)\overline{AB}$$

$$\therefore \overline{AB}=\frac{b}{\frac{1}{2}b-a}n$$

$$\therefore \overline{AB}=\frac{2b}{b-2a}n$$

註 2：公式化簡

$\therefore$公式可化簡為$\begin{cases} d^2+n^2=x^2+y^2(=\overline{OP}^2) \\ d^2+\left[\left(\dfrac{a}{a+b}\right)\left(\dfrac{2b}{b-2a}n\right)+n\right]^2=r^2 \end{cases}$

$$=\begin{cases} d^2+n^2=x^2+y^2(=\overline{OP}^2) \\ d^2+\left[\dfrac{2ab}{-2a^2-ab+b^2}n+n\right]^2=r^2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} d^2+n^2=x^2+y^2(=\overline{OP}^2) \\ d^2+\left[\dfrac{2ab-2a^2-ab+b^2}{-2a^2-ab+b^2}n\right]^2=r^2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} d^2+n^2=x^2+y^2(=\overline{OP}^2) \\ d^2+\left[\dfrac{-2a^2+ab+b^2}{-2a^2-ab+b^2}n\right]^2=r^2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} d^2+n^2=x^2+y^2(=\overline{OP}^2) \\ d^2+\left[\dfrac{2a^2-ab-b^2}{2a^2+ab-b^2}n\right]^2=r^2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} d^2+n^2=x^2+y^2(=\overline{OP}^2) \\ d^2+\left[\dfrac{(2a+b)(a-b)}{(2a-b)(a+b)}n\right]^2=r^2 \end{cases}$$

參●結果

一、 單位圓中，過 P(1,1) 之兩條等長弦互相分為 1：m(m 為自然數)的弦心距與 $\overline{\text{MP}}$ 長的公式

利用畢氏定理可證得$\begin{cases} d^2+n^2=\overline{OP}^2 \\ d^2+\left[\left(\frac{m+1}{m-1}\right)n\right]^2=r^2 \end{cases}$

二、 在整數比中關於 $\overline{\text{PA}}:\overline{\text{PB}}$ =1：6 之限制

因為起初設P$\left(\frac{1}{2}，\frac{1}{2}\right)$為定點，造就$\frac{1}{m}$的限制，1:m 的最大值必為(P 至圓周的最短距離)：(P 至圓周的最長距離)

亦即$\dfrac{1}{m}\geq\dfrac{r-\overline{OP}}{r+\overline{OP}}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\approx\dfrac{0.586}{3.414}=\dfrac{1}{5.826}\Rightarrow m<6$

三、 單位圓中，過動點 P 互相分為 1：m(m 為自然數)之兩條等長弦的弦心距與 $\overline{\text{MP}}$ 長的公式

當將弦分為1: m型時

公式將變為$\begin{cases} d^2+n^2=x^2+y^2(=\overline{OP}^2) \\ d^2+\left(\dfrac{m+1}{m-1}n\right)^2=r^2 \end{cases}$

$\because$ 動點P可無限逼近圓周

$\therefore m \to \infty$

四、 單位圓中，過動點 P 互相分為 a：b(a、b 為實數)之兩條等長弦的弦心距與 $\overline{\mathrm{MP}}$ 長的公式

利用變換變數，可將原本公式$\begin{cases} d^2+n^2=x^2+y^2(=\overline{OP}^2) \\ d^2+\left(\dfrac{a}{a+b}\overline{AB}+n\right)^2=r^2 \end{cases}$中

$\overline{\mathrm{AB}}$弦長轉化為$\begin{cases} d^2+n^2=x^2+y^2(=\overline{OP}^2) \\ d^2+\left[\dfrac{(2a+b)(a-b)}{(2a-b)(a+b)}n\right]^2=r^2 \end{cases}$

肆●引註資料

1. 徐清朗。徐氏簡明講義(2011)。高雄市：光朗出版社。
2. 許志農。普通高級中學數學 3(2011)。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。
3. 黃呈明。新高中數學 101(2010)。台北縣：太宇出版股份有限公司。