投稿類別：數學類

篇名：
費氏數列的性質整理

作者：
李晨滔。桃園縣立大園國際高中。高一 12 班

指導老師：
馮勁敏老師

費氏數列的性質整理

壹●前言

費氏數列是一個歷史悠久的數列，它十分耐人尋味，是古今中外許多數學家研究的題材。然而，它在數學競賽的命題中也占有一席之地。無論是美國 AMC、澳洲 AMC、甚至是莫斯科數學奧林匹克裡都有費氏數列的影子。這讓我對它產生了興趣，但在網路上卻不容易找到經過歸納的費氏數列的資料，於是我決定對它展開調查與歸納。

但眾所周知，費氏數列的性質太多了，不可能把全部的性質統統整理起來，所以我打算整理些重點性質以及一些有趣的性質，並期許這份小論文能對將來想要研究費氏數列的人以及一些國高中朋友們有所幫助。僅此。

貳●正文

一、「費氏數列」的定義與通式

設$\langle f_n \rangle$為費氏數列，它在數學中是以遞迴的方式定義的：

$$f_1 = f_2 = 1 \text{ 且 } f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{，} n \ge 1$$

由它的定義，我們明顯的可以知道，數列裡的每一項都是正整數。

我們還可以利用特徵根方法求出它的通式：

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

二、(性質 1)費氏數列中，前 n 項之和加 1 後等於第(n+2)項，即

$$\sum_{k=1}^{n} f_n + 1 = f_{n+2} \text{，} n \ge 1$$

證明：

技巧地，這裡的 1 我們視為 $f_2 (\because f_1 = f_2 = 1)$，故

$$\begin{aligned} &1 + f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots + f_{n-1} + f_n \\ &= (f_2 + f_1) + f_2 + f_3 + \ldots\ldots + f_{n-1} + f_n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=(f_3+f_2)+f_3+\ldots\ldots+f_{n-1}+f_n \\
&=(f_4+f_3)+f_4\ldots\ldots+f_{n-1}+f_n \\
&=\ldots\ldots \\
&=(f_n+f_{n-1})+f_n=f_{n+1}+f_n=f_{n+2}
\end{aligned}
$$

命題獲證。

三、(性質 2)費氏數列中，第(m+n)項等於第 m 項乘上第(n-1)項後再加上第(m+1)項乘上第 n 項之和，即

$$f_{m+n}=f_m f_{n-1}+f_{m+1}f_n \text{，} m,n\geq 1$$

證明：

$$
\begin{aligned}
f_{m+n}&=f_1 f_{m+n-2}+f_2 f_{m+n-1}(\because f_1=f_2=1) \\
&=f_1 f_{m+n-2}+f_2(f_{m+n-2}+f_{m+n-3}) \\
&=f_{m+n-2}(f_1+f_2)+f_2 f_{m+n-3} \\
&=f_2 f_{m+n-.3}+f_3 f_{m+n-2} \\
&=f_3(f_{m+n-3}+f_{m+n-4})+f_2 f_{m+n-3} \\
&=f_{m+n-3}(f_2+f_3)+f_3 f_{m+n-4} \\
&=f_3 f_{m+n-4}+f_4 f_{m+n-3} \\
&=\ldots\ldots\ldots \\
&=f_m f_{n-1}+f_{m-1}f_n
\end{aligned}
$$

命題獲證。

四、(性質 3)費氏數列中，第 n 項與第(n-1)項的平方和等於第(2n-1)項，即

$$f_n^{\ 2}+f_{n-1}^{\ 2}=f_{2n-1} \text{，} n\geq 1$$

證明：

這其實是上一個性質的推廣，由性質 2，我們知道

$$f_{m+n}=f_m f_{n-1}+f_{m+1}f_n \text{，} m,n\geq 1 \text{，故}$$

$$f_{2n-1}=f_{n+(n-1)}=f_{n-1}f_{n-1}+f_n f_n= f_{n-1}^{\ 2}+f_n^{\ 2}$$

命題獲證。

五、(性質 4)費氏數列中，第一項到第(2n-1)項之間的所有奇數項之和等於第 2n 項，即

$$f_1+f_3+f_5+f_7+\dots+f_{2n-1}=f_{2n}\ ，\ n\ge 1$$

證明：

這邊要利用到費氏數列最原先的定義，即 $f_1=f_2=1$ 且 $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$， $n\ge 1$ 。

$$\begin{aligned}
&f_1+f_3+f_5+f_7+\dots+f_{2n-1}\\
&=f_1+(f_4-f_2)+(f_6-f_4)+(f_8-f_6)+\dots+(f_{2n}-f_{2n-2})\\
&=f_1-f_2+f_{2n}=f_{2n}
\end{aligned}$$

命題獲證。

六、(性質 5)費氏數列中，第 2 項到第 2n 項之間的所有偶數項和等於第(2n+1)項減 1，即

$$f_2+f_4+f_6+\dots+f_{2n}=f_{2n+1}-1\ ，\ n\ge 1$$

證明：
利用前面的性質１，我們知道

$$f_1+f_2+f_3+f_4+\dots+f_{2n}=f_{2n+2}-1$$

$$(f_1+f_3+f_5+\dots+f_{2n-1})+(f_2+f_4+f_6+\dots+f_{2n})=f_{2n+2}-1$$

再進一步結合性質 4，我們有

$$f_2+f_4+f_6+\dots+f_{2n}=f_{2n+2}-1-f_{2n}=f_{2n+1}-1$$

命題獲證。

七、(性質 6)費氏數列中，1 倍的第 1 項與 2 倍的第 2 項與 3 倍的第 3 項一直到 n 倍的第 n 項的總和等於 n 倍的第(n+2)項減掉第(n+3)項後再加上 2，即

$$\sum_{k=1}^{n}k\,f_k=n\,f_{n+2}-f_{n+3}+2\ ，\ n\ge 1$$

證明：
以下的三個性質都用數學歸納法證明。

當 $n=1$ 時：右式 $=1\times f_3-f_4+2=f_3-(f_3+f_2)+2=1=1\times f_1=$ 左式

$\therefore n=1$時命題成立。

設$n=k$時命題成立，故

$$f_1+2f_2+3f_3+\ldots+kf_{\mathrm{k}}=kf_{\mathrm{k+2}}-f_{\mathrm{k+3}}+2$$

當$n=k+1$時：

$$\begin{aligned}
&f_1+2f_2+3f_3+\ldots+kf_{\mathrm{k}}+(k+1)f_{\mathrm{k+1}}\\
&=kf_{\mathrm{k+2}}-f_{\mathrm{k+3}}+2+(k+1)f_{\mathrm{k+1}}\\
&=k(f_{\mathrm{k+2}}+f_{\mathrm{k+1}})-f_{\mathrm{k+3}}+f_{\mathrm{k+1}}+2\\
&=kf_{\mathrm{k+3}}-f_{\mathrm{k+3}}+f_{\mathrm{k+1}}+2\\
&=kf_{\mathrm{k+3}}-(f_{\mathrm{k+4}}-f_{\mathrm{k+2}})+(f_{\mathrm{k+3}}-f_{\mathrm{k+2}})+2\\
&=kf_{\mathrm{k+3}}-f_{\mathrm{k+4}}+f_{\mathrm{k+3}}+2\\
&=(k+1)f_{\mathrm{(k+1)+2}}-f_{\mathrm{(k+1)+3}}+2
\end{aligned}$$

$\therefore n=k+1$時命題亦成立。

由數學歸納法原理知，$\forall n\in N$ ，$\sum_{k=1}^{n}kf_{\mathrm{k}}=nf_{\mathrm{n+2}}-f_{\mathrm{n+3}}+2$恆成立。

八、(性質 7)費氏數列中，第 1 項到第 n 項之間所有項的平方和等於第 n 項與第(n+1)項之積，即

$$\sum_{k=1}^{n}f_k^{\,2}=f_{\mathrm{n}}f_{n+1}\ ,\ n\geq 1$$

證明：

當$n=1$時，$f_1^{\,2}=f_1f_2(\because f_1=f_2=1)$　$\therefore n=1$時命題成立。

設$n=k$時命題成立，故

$$f_1^{\,2}+f_2^{\,2}+f_3^{\,2}+\ldots+f_k^{\,2}=f_kf_{k+1}$$

當$n=k+1$時：

$$\begin{aligned}
&f_1^{\,2}+f_2^{\,2}+f_3^{\,2}+\ldots+f_k^{\,2}+f_{k+1}^{\,2}\\
&=f_kf_{k+1}+f_{k+1}^{\,2}=f_{k+1}(f_k+f_{k+1})=f_{k+1}f_{(k+1)+1}
\end{aligned}$$

$\therefore n=k+1$時命題亦成立。

由數學歸納法原理知，$\forall n\in N$ ，$\sum_{k=1}^{n}f_k^{\,2}=f_{\mathrm{n}}f_{n+1}$恆成立。

九、(性質 8)費氏數列中，若 n 是 m 的倍數，則 f_n 亦是 f_m 的倍數，即

$$若 m \mid n \rightarrow f_m \mid f_n，m,n \geq 1$$

證明：
這裡需要用到一個 Lemma：

$$f_\alpha f_\beta + f_{\alpha-1} f_{\beta-1} = f_{\alpha+1} f_{\beta-1} + f_\alpha f_{\beta-2}，\alpha \geq 2，\beta \geq 3$$

這個性質再性質 2 的證明中已經證過，這邊不再重複證明的直接引用。
令 $n = mp$ ， $p \in N$

當 $p = 1$時， $f_m \mid f_{m\times1}$顯然成立 $\therefore n = 1$時命題成立。

設 $p = k$ 時命題成立，即

$$f_m \mid f_{mk}$$

令 $f_{mk} = t\, f_m$ ，$t \in N$ ，則當 $p = k+1$時：

$$\begin{aligned}
f_{m(k+1)} &= f_{m(k+1)-1} + f_{m(k+1)-2} \\
&= f_2 f_{m(k+1)-1} + f_1 f_{m(k+1)-2} (\because f_1 = f_2 = 1) \\
&= f_{2+1} f_{m(k+1)-1-1} + f_2 f_{m(k+1)-1-2} \\
&= f_3 f_{m(k+1)-2} + f_2 f_{m(k+1)-3} \\
&= f_4 f_{m(k+1)-3} + f_3 f_{m(k+1)-4} \\
&= f_5 f_{m(k+1)-4} + f_4 f_{m(k+1)-5} \\
&= \ldots\ldots\ldots \\
&= f_m f_{m(k+1)-1-(m-2)} + f_{m-1} f_{m(k+1)-1-(m-2)-1} \\
&= f_m f_{mk+1} + f_{m-1} f_{mk} \\
&= f_m f_{mk+1} + f_{m-1}(t\, f_m) = f_m(f_{mk+1} + t\, f_{m-1})
\end{aligned}$$

故 $f_m \mid f_{m(k+1)}$ $\quad \therefore p = k+1$時命題亦成立。

由數學歸納法原理知，$\forall p \in N$ ， $f_m \mid f_{mp}$ 恆成立。

命題獲證。

十、(性質 9)費氏數列中，第 n 項的平方減掉第(n-1)項與第(n+1)項的積，所得的結果是(-1)的(n+1)次方，即

$$f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1} = (-1)^{n+1}，n \ge 2$$

證明：

這邊利用費氏數列的通式來證明。

令 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，$\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \to \alpha + \beta = 1$，$\alpha\beta = -1$，且 $f_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$

$$\begin{aligned}
& f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1} \\
&= [\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)]^2 - [\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})][\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})] \\
&= \frac{1}{5}(\alpha^n - \beta^n)^2 - \frac{1}{5}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \\
&= \frac{1}{5}[\alpha^{2n} - 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n} - (\alpha^{2n} - \alpha^{n-1}\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta^{n-1} + \beta^{2n})] \\
&= \frac{1}{5}[-2(\alpha\beta)^n + \alpha^{n-1}\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^{n-1}] \\
&= \frac{1}{5}(\alpha\beta)^n[-2 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}] \\
&= \frac{1}{5}(\alpha\beta)^n[-2 + \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}] = \frac{1}{5}(\alpha\beta)^n[-5] = -(\alpha\beta)^n = (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

命題獲證。

十一、(性質 10)費氏數列中，任一項與其前一項的平方差等於其前兩項與後一項之積，即

$$f_n^2 - f_{n-1}^2 = f_{n-2} f_{n+1}，n \ge 3$$

證明：

$$f_n^2 - f_{n-1}^2 = (f_n + f_{n-1})(f_n - f_{n-1}) = f_{n+1} f_{n-2}$$

命題獲證。

十二、(性質 11)費氏數列中，任一項與其前一項的最大公因數為 1，即

$$(f_n, f_{n-1}) = 1，n \ge 2$$

證明：
這裡要用到數論中的一個定理：

$$(a,b)=(a,b+ax)\text{ ， }a,b,x\in Z$$

這其實是輾轉相除裡的一環，但這不是本論文重點，證明略。
故

$$(f_n,f_{n-1})=(f_{n-1}+f_{n-2},f_{n-1})=(f_{n-2},f_{n-1})=(f_{n-1},f_{n-2})=....=(f_2,f_1)=1$$

命題獲證。

十三、(性質 12)費氏數列中，第 m 項與第 n 項的最大公因數等於第(m,n)項，即

$$(f_m,f_n)=f_{(m,n)}\text{ ， }m,n\geq 1$$

證明：

當$m=n$時，左式$=(f_m,f_n)=(f_m,f_m)=f_m=f_{(m,m)}=f_{(m,n)}=$右式，結論成立。

考慮$m=1$的情況。左式$=(f_m,f_n)=(1,f_m)=1=f_1=f_{(1,n)}=f_{(m,n)}=$右式，結論依然成立。
現在不妨設$n>m$，利用性質 2，我們有

$$f_n=f_m f_{n-m+1}+f_{m-1}f_{n-m}\text{ ， }n>m\geq 2$$

設f_n與f_m的最大公因數為 d，則由上式可知 d 是$f_{m-1}f_{n-m}$的因數，再利用性質 11 可知$(f_m,f_{m-1})=1$，故$(d,f_{m-1})=1$，從而知 d 是f_{n-m}的因數。僅從前面討論的來看，並不能保證 d 也是f_{n-m}的最大公因數。反過來看，設d'是f_m與f_{n-m}的最大公因數，則有$d'\geq d$，再由上式可知d'也是f_n的公因數，故$d'\leq d$，即$d'=d$。

故$(f_n,f_m)=(f_{n-m},f_m)$。再利用輾轉相除法，可知命題成立。

十三、(性質 12)費氏數列中，任取連續的 k 項，其總和不會出現在數列中。

證明：

設$S=f_n+f_{n+1}+f_{n+2}+...+f_{n+k-2}+f_{n+k-1}$，則有

$$f_{\mathrm{n+k}} = f_{\mathrm{n+k-1}} + f_{\mathrm{n+k-2}} < S < S + f_{\mathrm{n+1}} = f_{\mathrm{n+k+1}}$$

即它不會出現在數列中，命題獲證。
在 1957 年莫斯科數學奧林匹克裡即問到了本性質 k=8 的情況。

十四、(性質 13)費氏數列中，每一項模 k 後(k 為正整數)所形成的餘數數列必定會循環。

證明：
對於任一項 f_n ，令 R_n 表示 f_n 除以 k 後的餘數， $R_n < k$ ， $n = 1,2,3.....$

(一)先證明一個 Lemma：

$$R_n + R_{n+1} \equiv R_{n+2} (\bmod k)$$

證明：
設 $f_n = ka + R_n$ ， $f_{n+1} = kb + R_{n+1}$ ， $f_{n+2} = kc + R_{n+2}$ $a, b, c \in N$ ，則

$$R_n + R_{n+1} \equiv ka + R_n + kb + R_{n+1} \equiv f_n + f_{n+1} \equiv f_{n+2} \equiv kc + R_{n+2} \equiv R_{n+2} (\bmod k)$$

證畢。

(二)由 R_n 的定義知，$R_n \in Q = \{0, 1, 2, 3, ..., k-1\}$，其中集合 Q 是模 k 的完全剩餘系。

考慮相鄰的兩個餘數數對(R_i, R_{i+1})，其中 $R_i \in Q, R_{i+1} \in Q$，故(R_i, R_{i+1})至多有 $k \times k$ 種組合，故由抽屜原裡知，當餘數數列出現了 $k^2 + 2$ 個數時，必定有一組(R_i, R_{i+1})與(R_j, R_{j+1}) 相同。

結合(一)與(二)，知 $R_i, R_{i+1}, R_{i+2}, ...$ 與 $R_j, R_{j+1}, R_{j+2}, ...$ 完全相同，即開始循環。又 $k^2 + 2$ 顯然是個有限的數，故經過一個有限的數後，餘數數列會開始循環，從而命題成立。
在 2004 年的澳洲 AMC 中級卷裡即問到了本性質 k=10 的情況。

參●結論

這次的小論文報告，整理了許多我覺得基本、有趣的性質，但還是有些遺珠之憾。例如說費氏數列也與黃金比例、幾何、帕斯卡三角形等有關，以即費氏數列在生活中的應用等，但因為相關的資料太多了，要每項每項地列在小論文裡面，有些困難。故希望下次研究主題可以朝著更大的面向發展。

肆●引註資料

1.費布那西數列(Fibonacci)。2014年3月11日，取自
http://web.nlhs.tyc.edu.tw/~b305/fibonacci

2.費氏數列。1-10。2014年3月11日，取自
http://math1.ck.tp.edu.tw/%E9%99%B3%E5%98%AF%E8%99%8E/%E5%B0%8F%E8%99%8E/%E5%B0%88%E9%A1%8C%E6%95%99%E6%9D%90/%E6%95%99%E5%AD%B8%E8%B3%87%E6%96%99/%E8%B2%BB%E6%B0%8F%E6%95%B8%E5%88%97.pdf

3.周恢潁、莊詠如(2012)。費氏數列的倍數性質。1-5。2014年3月11日，取自
http://www.shs.edu.tw/works/essay/2012/04/2012040310055218.pdf

4.許志農(2004)。費氏數列。1-8。2014年3月11日，取自
http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/arith/15.pdf

5.白啟光(2002)。費氏數列及黃金分割。1-9。2014年3月11日，取自
http://calculus.nctu.edu.tw/upload/calculus_web/maple/Site/carnival/fibonacci/01.htm

6.馮志剛(2006)。整除、同餘與不定方程。台北市：九章出版社。

7.葛顯良(譯)(2011)。澳洲數學競賽(AMC)試題解析(第四冊1999-2005)。台北市：九章出版社。

8.蘇淳、葛斌華、胡大同(譯)(2001)。第1-54屆莫斯科數學奧林匹克。台北市：九章出版社。